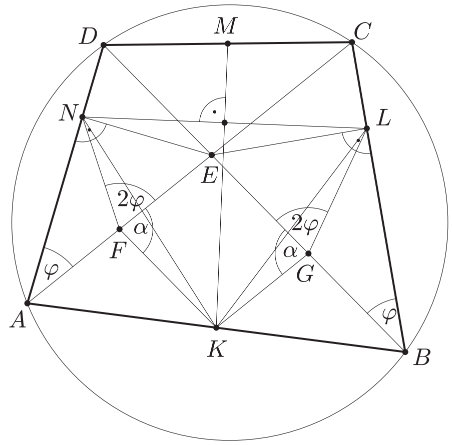
I. megoldás. Legyen az AE szakasz felezőpontja F, a BE szakaszé pedig G. Az ANE és BLE háromszögek derékszögűek, ezért az AE, illetve EB átmérőjű Thalész-körök ezen háromszögek köré írható körei, középpontjaik F és G. Emiatt $AF = FE = FN$ és $BG = GE = GL$.

Az $ABCD$ húrnégyszög, ezért $CBD\sphericalangle = CAD\measuredangle = \varphi$, mivel a CD ívhez tartozó kerületi szögek. Így az előbbi derékszögű háromszögekben a középponti és kerületi szögek összefüggését felhasználva $NFE\sphericalangle = 2\varphi$ és $EGL\sphericalangle = 2\varphi$ (*1. ábra*).



1. ábra

Az ABE háromszögben KF és KG középvonalak, ezért az $EFKG$ négyszög paralelogramma, így szemközti szögei egyenlők: $EFK\sphericalangle = KGE\sphericalangle = \alpha$.

Mivel $KG = FE = FN$ és $KF = GE = GL$, azért $NFK\triangle \cong KGL\triangle$, mivel két oldaluk és a közbezárt szög megegyezik. Tehát $NK = KL$, vagyis az LNK háromszög egyenlő szárú, így NL alapjának felezőmerőlegese átmegy a K ponton.

Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy az LNM háromszög is egyenlő szárú, és LN alapjának felezőmerőlegese átmegy az M ponton.

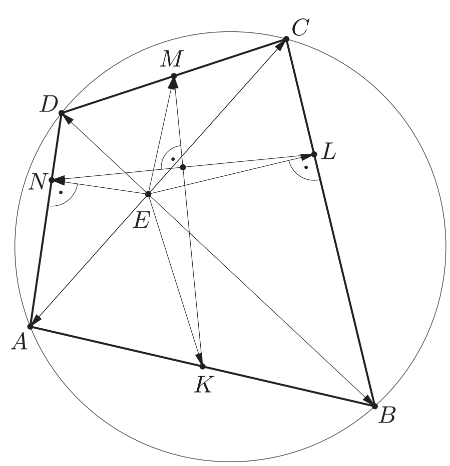
Beláttuk, hogy az LN szakasz felezőmerőlegese átmegy K és M pontokon is, vagyis KM valóban merőleges az NL szakaszra, sőt még felezi is.

Az ábrán $CBD\sphericalangle$ és $CAD\sphericalangle$ hegyesszögek. Ilyenkor L és N pontok a BC és AD szakaszok belső pontjai. Ha a két szög tompaszög lenne, akkor ezek a pontok az AD és BC szakaszok meghosszabbításán keletkező külső pontok lesznek, de a gondolatmenet változatlanul működik.

Ha a két szög derékszög, akkor a pontok a CD szakasz Thalész-körén lesznek rajta, azaz L és N megegyezik az A és B pontokkal. Ekkor KM egyenes a Thalész-kör átmérője, ami áthalad LN, azaz AB húr felezőpontján, ezért éppen a húr felezőmerőlegese.

II. megoldás. Dolgozzunk vektorokkal! Legyen E az origó, a négy csúcsba mutató vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ (*2. ábra*). M helyvektora $\dfrac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2}$ és K helyvektora $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$, tehát

$$\overrightarrow{KM} = \frac{\mathbf{c}+\mathbf{d}}{2} - \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2} = \frac{\mathbf{d}-\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{c}-\mathbf{b}}{2}.$$



2. ábra

Az EN egyenes irányvektora az $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$ vektor 90°-os elforgatottja, az EL egyenesé pedig a $\overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektoré. ($\mathbf{d} - \mathbf{a}$ 90°-os elforgatottját jelölje $(\mathbf{d} - \mathbf{a})^{90}$. Mindkettőt pozitív irányba forgatjuk.)

$$\overrightarrow{LN} = \overrightarrow{EN} - \overrightarrow{EL} = \alpha \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{a})^{90} - \beta \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})^{90} = \alpha \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{a})^{90} + \beta \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})^{90},$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tehát ha $\alpha = \beta$, akkor az $\overrightarrow{LN}$ vektor valóban merőleges az $\overrightarrow{KM}$ vektorra.

Azt kell tehát még belátnunk, hogy az EN és EL távolságok úgy aránylanak egymáshoz, mint a négyszög AD és CB oldalai.

Mivel $ABCD$ húrnégyszög, $EDA\sphericalangle = BCE\sphericalangle$ és $EAD\sphericalangle = CBE\sphericalangle$, valamint nyilván $AED\sphericalangle = CEB\sphericalangle$. Így EDA háromszög hasonló ECB-hez, vagyis

$$\alpha = \frac{EN}{AD} = \frac{EL}{CB} = \beta,$$

tehát igaz az arányokra vonatkozó állítás.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.