Megoldás. Alkossák a H halmazt a K sokszöglemez S síkjának mindazon pontjai, amelyek véges sok, a K oldalegyeneseire végzett tükrözés egymásutánjával K-ba vihetők. A mi feladatunk a $H = S$ egyenlőség igazolása. Világos, hogy $K \subseteq H$, továbbá a konstrukció folytán H tükrös K minden oldalegyenesére. Legyen $\mathcal{E}$ a H tükörtengelyeinek halmaza. Világos, hogy ha $t_1, t_2 \in \mathcal{E}$ és t_1' a t_1 tükörképe t_2-re, akkor $t_1' \in \mathcal{E}$, ahol azaz H tükrös minden olyan egyenesre is, amelyet H egy tükörtengelyének a H egy másik tükörtengelyére való tükrözésével kapunk.

Mivel $K \subseteq H$, ezért H tükörszimmetriái folytán K-nak minden olyan K' képe is H-ban fekszik, amit K-ból $\mathcal{E}$-beli egyenesekre vonatkozó tükrözések egymásutánjával kapunk. Ráadásul az így kapható K' sokszögek minden oldalegyenese $\mathcal{E}$-beli, azaz a H egy tükörtengelye.

Jelölje $r \geq 0$ esetén K^r az S sík azon pontjait, amelyek legfeljebb r távolságra vannak a K sokszöglemeztől. Megmutatjuk, hogy $K^r \subseteq H$ teljesül alkalmas $r > 0$ esetén. Válasszunk egy olyan $R > 0$ számot, amelyre a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyikének a K-val vett metszete körcikk. Egy ilyen R sugarú körcikk tükörképe a körcikket határoló sugár egyenesére H-ban fekszik, hiszen a tükrözés tengelyére H szimmetrikus. Sőt: ha a tükörképként kapott körcikket tükrözzük egy azt határoló sugár egyenesére, akkor az így kapott kép is H-ban marad, és ugyanez az így kapott tükörképek tükörképeire is igaz. Ezért a K csúcsai köré írt R sugarú körlemezek mindegyike része H-nak. Tekintsük a K sokszöglemeznek, a K csúcsai köré írt R sugarú köröknek és a K-nak a K oldalegyeneseire vett tükörképeinek K^* unióját. Könnyen látható, hogy van olyan $r > 0$ szám, amelyre $K^r \subseteq K^*$ teljesül, tehát alkalmas n-re

$$K^r \subseteq K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n \subseteq H, \tag{1}$$

ahol minden egyes K_i-t a H bizonyos tükörtengelyeire való tükrözések egymásutánjával kapunk K-ból.

Most tegyük fel, hogy $K^t \subseteq H$ valamely $t > 0$-ra. Vegyük észre, hogy ha azokat a tükrözéseket, amelyek a K sokszöget K_i-be viszik a K helyett a K^t alakzatra végezzük el, akkor a kapott kép éppen K_i^t lesz. Vagyis ha $K^t \subseteq H$, akkor $K_i^t \subseteq H$, amiből (1) miatt

$$K^{(r+t)} \subseteq K_1^t \cup K_2^t \cup \ldots \cup K_n^t \subseteq H$$

következik. Az adódott tehát, hogy ha $K^t \subseteq H$, akkor $K^{t+r} \subseteq H$. Láttuk azonban, hogy $K^r \subseteq H$, ezért $K^{2r} \subseteq H$, innen $K^{3r} \subseteq H$ stb. Így aztán

$$H \subseteq S = K^r \cup K^{2r} \cup K^{3r} \cup \ldots \subseteq H$$

adódik, ahonnan $H = S$ következik, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. □

Megjegyzések. 1. Úgy kaphatunk egy lehetséges másik megoldást a feladatra, ha követjük a fenti bizonyítás első két bekezdését, majd azt igazoljuk, hogy az S sík lefedhető azokkal a K-val egybevágó sokszöglemezekkel, amelyeket K-ból megkaphatunk annak az operációnak a véges sokszori alkalmazásával, amelyben egy sokszöglemezt tükrözünk annak egy oldalegyenesére. Minden így kapott K' sokszöglemez ugyanis része H-nak, hiszen H szimmetrikus az operáció során használt tükörtengelyekre. Érdemes megfigyelni az alábbiakat. Legyen P a K sokszöglemez S síkjának egy pontja. Kössük össze P-t a K egy Q belső pontjával, és indítsunk el egy biliárdgolyót Q-ból a QP félegyenes mentén. Ha a K sokszöglemezt egy biliárdasztalnak gondoljuk, amelynek határát elérve a bilárdgolyó a fizikai törvényeknek megfelelően pattan vissza (azaz úgy, hogy a visszapattanó golyó pályáját tükrözve az éppen elért oldal egyenesére pontosan az adott oldal elérését megelőző pályaegyenes meghosszabbítását kapjuk), akkor a K sokszöglemeznek az a pontja, amelybe a biliárdgolyó $|\overline{PQ}|$ távolság megtétele után kerül, egy olyan pont lesz, amelybe P betükrözhető. Ha a feladat megoldását erre a megfigyelésre szeretnénk alapozni, akkor vizsgálni kell, mi is történik akkor, ha a biliárdgolyó az útja során K egy csúcsába jut. Nem lehetetlen ezt az esetet jól kezelni, de azt sem nehéz igazolni, hogy ilyenkor Q helyett választható K-nak egy másik Q' pontja, amelyből a golyót útjára indítva már nem ütközünk K csúcsába. Egy másik nehézség annak igazolása, hogy bármelyik pontból bármelyik irányba is indítjuk a biliárdgolyót, az tetszőlegesen nagy távolságot meg tud tenni a K sokszöglemezen. Ennek belátását az olvasóra bízzuk.

2. Könnyen látható, hogy a feladatban nem lényeges feltétel a K sokszöglemez konvex volta. Tekintsük ugyanis K összes oldalegyenesét. Ezek a síkot konvex tartományokra bontják fel. A konstrukcióból adódóan minden ilyen tartomány vagy része K-nak vagy diszjunkt K belsejétől. Tekintsünk egy K-ban elhelyezkedő, konvex K' tartományt. A K' minden oldalegyenese egyúttal oldalegyenese K-nak is, ezért ha a K'-re igazoltuk a feladat állítását, akkor abból azonnal következik, hogy K is rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Sőt, az is igaz, hogy K oldalegyeneseire végrehajtott tükrözések egymásutánjával K síkjának tetszőleges pontja a K-nál szűkebb K' konvex sokszöglemez belsejébe vagy határára tükrözhető.