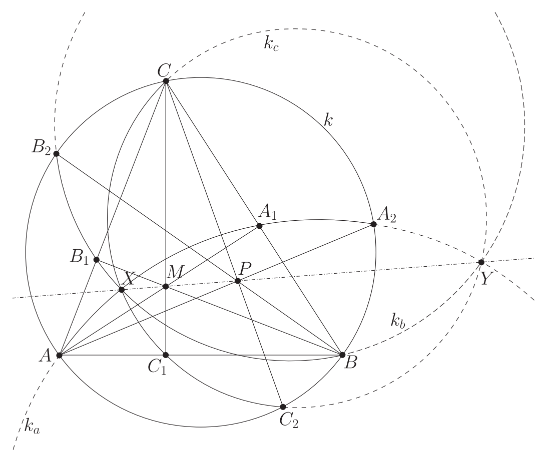
Megoldás. Jelölje az ABC, AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 köröket rendre k, k_a, k_b, illetve k_c; az ABC háromszög magasságpontja legyen M. A feltétel szerint az ABC háromszög hegyesszögű, ezért az A_1, B_1, C_1, M pontok k belsejében vannak.

A k kerületén az AA_2, BB_2 és CC_2 pontpárok páronként elválasztják egymást, ezért a k_a, k_b és k_c körök közül bármelyik kettő metszi egymást úgy, hogy az egyik metszéspontjuk k belsejében, a másik metszéspontjuk k-n kívül helyezkedik el. Legyen a k_a és a k_b körök metszéspontja k belsejében X, a másik metszéspontjuk legyen Y. Azt fogjuk megmutatni, hogy a k_c kör is átmegy az X és Y pontokon.



A P pont k-ra vonatkozó hatványa

$$PA \cdot PA_2 = PB \cdot PB_2 = PC \cdot PC_2.$$

Ezek a szorzatok egyben a P hatványai a k_a, k_b, illetve k_c körökre. Tehát a P pontnak a k_a, k_b és k_c körökre vonatkozó hatványa ugyanakkora.

Hasonlóan, az M pontnak az ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 körökre vonatkozó hatványa

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1.$$

Ezek a szorzatok pedig az M hatványai a k_a, k_b, illetve k_c körökre. Tehát az M pontnak a k_a, k_b és k_c körökre vonatkozó hatványa is ugyanakkora.

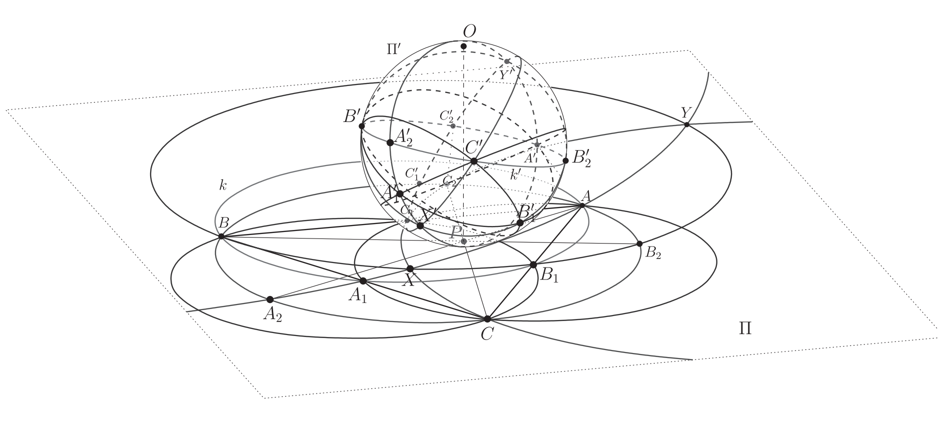
A feltétel szerint P és M különböző. Így a PM egyenes a k_a, k_b és k_c körök közös hatványvonala. A három kör tehát egy körsorhoz tartozik, így k_a és k_b metszéspontjain átmegy k_c is.

Ezzel megmutattuk, hogy a k_a, k_b, illetve k_c körök k-n belüli ívei, nevezetesen az AA_1A_2, BB_1B_2 és CC_1C_2 körívek egy ponton mennek át. $\square$

Megjegyzés. Egy alkalmas sztereografikus projekcióval (térbeli inverzióval) visszavezethetjük az állítást arra a jól ismert tényre, hogy a gömbfelületen bármely három körvonal páronként vett hatványvonalai egy átmérőre illeszkednek.

Jelöljük Π-vel az ABC háromszög síkját, és legyen Γ az a gömb, amelynek a k főköre. A P pontban állítsunk merőleges egyenest Π-re; legyen ennek egyik döféspontja a Γ-val O. Invertáljuk az ábrát az O középpontú, P-n átmenő gömbre; a szokásos módon tetszőleges x objektum képét jelöljük x'-vel. Az inverzió jól ismert tulajdonságai szerint a Π sík képe az OP átmérőjű Π' gömb; a Π síkban fekvő körök képei a gömbfelületen fekvő körvonalak. Speciálisan, a BCB_1C_1, a CAC_1A_1 és az ABA_1B_1 körök képei a $B'C'B_1'C_1'$, a $C'A'C_1'A_1'$ és az $A'B'A_1'B_1'$ körvonalak.

A Γ gömb definíciója szerint a Π sík és a Γ gömb merőlegesen metszi egymást a k kör mentén. Mivel az inverzió szögtartó, az Γ' sík és a Π' gömb is merőlegesen metszi egymást a k' kör mentén, így k' a Π' gömbnek főköre.



Vegyük észre, hogy az A' és A'_2 pontokon a Π' gömbnek legalább két különböző főköre is átmegy: ilyen a k' kör, és az $OA'PA'_2$ kör is. (Utóbbi átmegy az átellenes O és P pontokon, de nem szerepel az *ábrán.*) Ebből következik, hogy a Π' gömbön A' és A'_2 átellenes pontok, és az $A'A'_1A'_2$ körvonal is főkör. Ez a főkör átmegy a $C'A'C'_1A'_1$ és az $A'B'A'_1B'_1$ körök metszéspontjain, A'-n és A'_1-n; tehát az $A'A'_1A_2$ körvonal nem más, mint a $C'A'C'_1A'_1$ és az $A'B'A'_1B'_1$ körök hatványvonala.

Hasonlóan kapjuk, hogy a $B'C'B'_1C'_1$ és az $A'B'A'_1B'_1$ kör hatványvonala a $B'B'_1B'_2$ főkör, illetve hogy a $B'C'B'_1C'_1$ és az $C'A'C'_1A'_1$ kör hatványvonala a $C'C'_1C'_2$ főkör.

A három hatványvonal két, egymással átellenes közös ponton megy át; jelölje ezeket X' és Y' úgy, hogy X és O a k' főkör ellentétes oldalán legyenek. Az X', Y' pontokat O-ból visszavetítve a Π síkra, megkapjuk az AA_1A_2, BB_1B_2, és CC_1C_2 körök közös pontjait: az X pont a k körön belül, az Y pont a k körön kívül lesz.