

1. megoldás. Legyen A a társaság egy olyan tagja, aki a társaságból a lehető legtöbb személyt ismeri. Legyen B egy olyan illető, akit A nem ismer, C pedig legyen B egy ismerőse. Mivel C -nek legfeljebb annyi ismerőse van, mint A -nak, ezért függetlenül attól, hogy A és C ismeri-e egymást, A -nak legalább annyi C -től különböző ismerőse van, mint ahány A -tól különböző ismerőse van C -nek. A konstrukció folytán C ismeri azt a B -t, akit A nem ismer. Ezért A -nak bizonyosan van olyan C -től különböző D ismerőse, akit C nem ismer. Ekkor ha A , B , C és D ebben a sorrendben ülnek az asztalhoz, akkor éppen a feladatban kirótt feltételt teljesítik. \square

2. megoldás. Készítsük el az élszínezett G gráfot az n pontú teljes gráfból az alábbiak szerint. A G gráf csúcsait kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük a társaság tagjainak, és G egy éle akkor legyen piros, ha a csúcsoknak megfelelő tagok nem ismerik egymást, egyébként pedig az adott él színe legyen zöld.

A bizonyítandó állítás átfogalmazható úgy, hogy ha a teljes gráf éleit úgy színezzük pirosra és zöldre, hogy minden csúcsból indul piros és zöld él is, akkor a gráfban van tarka négyszög, azaz négy különböző A , B , C és D csúcs úgy, hogy míg az AB és CD élek pirosak, addig a BC és DA élek zöldek. Az alábbiakban ezt az állítást fogjuk n szerinti teljes indukcióval igazolni. Ez az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvalóan teljesül, hiszen a feltevés lehetetlent kíván.

Tegyük fel tehát, hogy legfeljebb $n - 1$ csúcsú gráfokra már igazoltuk az indukciós állítást, és a vizsgált G -nek n csúcsa van. Legyen A a G egy csúcsa. Ha az A törlésével keletkező $G - A$ gráf minden csúcsából indul piros és zöld él is, akkor kész vagyunk, hisz az indukciós feltevés miatt $G - A$ -ban van tarka négyszög, ami persze egyúttal G -ben is tarka négyszög. Feltehetjük tehát, hogy $G - A$ egy B csúcsából (mondjuk) csak piros él indul (és persze AB zöld). Ha most $G - B$ -ben nincs tarka négyszög, akkor az indukciós feltevés miatt $G - B$ -ben van olyan C csúcs, amelyből csupa egyszínű él indul.

Ha $A = C$, akkor a zöld AB élen kívül A -ból és B -ből csak piros élek indulnak. Legyen BX egy piros, XY pedig egy zöld él. Mivel XY zöld, ezért $Y \neq A$, tehát $ABXY$ tarka négyszög. Ha pedig $A \neq C$, akkor legyen AD egy A -ból induló piros él. A konstrukció folytán AB zöld, BC piros, CD zöld és DA piros, tehát $ABCD$ egy G -beli tarka négyszög. Az indukciós állítást ezzel igazoltuk, a bizonyítás ezzel teljes. \square

Megjegyzés. Általában nem igaz, hogy egy 4-személyesnél nagyobb asztalhoz is biztosan le tudjuk ültetni a társaság néhány tagját a feladatban leírt módon. Ha ugyanis a társaságban van két olyan ismerős, hogy egyikük se ismeri a társaság egyetlen más tagját sem, továbbá e két ismerősön kívül mindenki mindenkit ismer, akkor teljesül a feladatban kirótt feltétel, de 4-nél több ember nem ültethető le a kívánt módon.