Megoldás. Legyen az $AB_1B_2\dots B_6$ hétszög körülírt köre k_B, az $AC_1C_2\dots C_6$ hétszög körülírt köre pedig k_C. A k_B és k_C körök átmennek A-n. Jelölje a két kör A-tól különböző metszéspontját M (ha a két kör A-ban érinti egymást, akkor $M \equiv A$). Megmutatjuk, hogy $i = 1, 2, \dots, 6$ esetén a B_iC_i egyenesek mindegyike átmegy M-en.

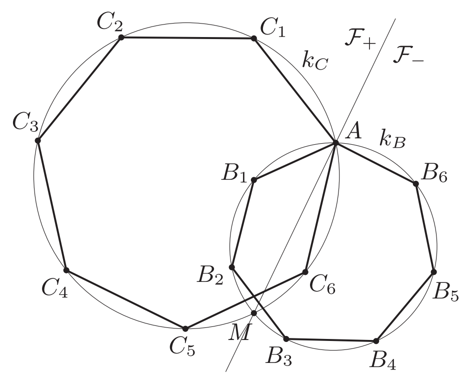
Legyen $\alpha = \dfrac{180^\circ}{7}$. Ez a szabályos hétszögek oldalaihoz tartozó kerületi szög mind a k_B, mind pedig a k_C körben. Az α szög segítségével meg fogjuk határozni az AMB_i és AMC_i szögeket. Két fő esetet különböztetünk meg, annak megfelelően, hogy a B_i és C_i csúcsok az AM egyenes (ha a két kör A-ban érinti egymást, akkor az A-beli közös érintőjük) által meghatározott két félsík közül ugyanabba vagy különbözőekbe esnek.

Feltehetjük, hogy a hétszögek pozitív körüljárásúak. Nevezzük az AM egyenes által meghatározott félsíkok közül pozitívnak azt, amelyik a k_B és k_C körök A-ból M-be menő ívei közül a pozitív irányút tartalmazza, negatív félsíknak pedig a másikat, s jelölje e nyílt félsíkokat $\mathcal{F}_+$ és $\mathcal{F}_-$ (*1. ábra*). Ekkor a kerületi szögek tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$AMB_i\sphericalangle = \begin{cases} AMB_1\sphericalangle + B_1MB_2\sphericalangle + \ldots + B_{i-1}MB_i\sphericalangle = i\alpha, & \text{ha } B_i \in \mathcal{F}_+, \\ AMB_6\sphericalangle + B_6MB_5\sphericalangle + \ldots + B_{i+1}MB_i\sphericalangle = (7-i)\alpha, & \text{ha } B_i \in \mathcal{F}_-, \end{cases}$$

s ugyanígy

$$AMC_i\sphericalangle = \begin{cases} i\alpha, & \text{ha } C_i \in \mathcal{F}_+, \\ (7-i)\alpha, & \text{ha } C_i \in \mathcal{F}_-. \end{cases}$$

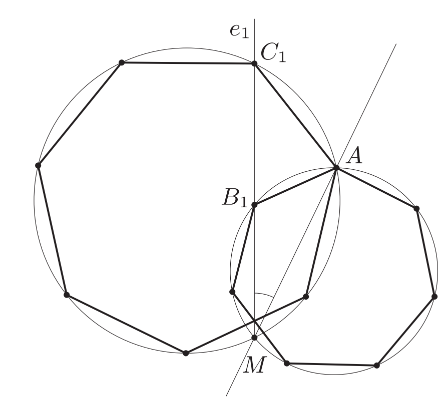


1. ábra

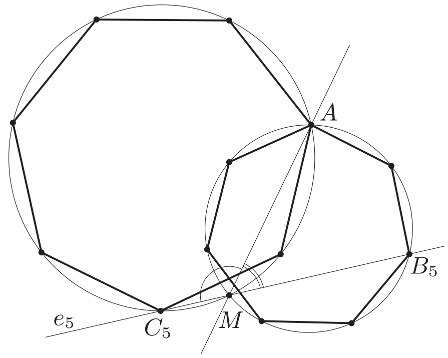
Ezek után már egyszerűen beláthatjuk, hogy az M, B_i és C_i pontok minden $i = 1, 2, \dots, 6$ esetén egy egyenesbe esnek. Ha $M \equiv B_i$ vagy $M \equiv C_i$, akkor ez nyilvánvaló. Ha B_i és C_i közül mindkettő az $\mathcal{F}_+$ vagy az $\mathcal{F}_-$ félsíkba esik, akkor $AMB_i\sphericalangle = AMC_i\sphericalangle$, és mivel B_i és C_i az AM egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, ezért ebből következik, hogy B_i és C_i ugyanazon az M-ből kiinduló félegyenesen helyezkednek el (*2. ábra*). Ha viszont B_i és C_i különböző félsíkokban vannak, akkor

$$AMB_i\sphericalangle + AMC_i\sphericalangle = i \cdot \alpha + (7-i) \cdot \alpha = 180^\circ,$$

s mivel B_i és C_i az AM egyenesnek különböző oldalain vannak, ezért ebből következik, hogy B_i, C_i és M kollineárisak (*3. ábra*).

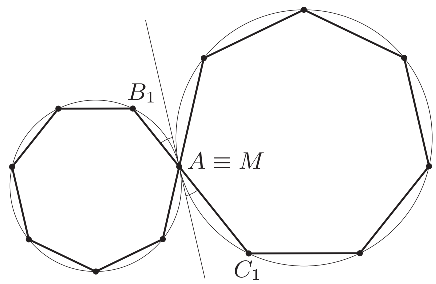


2. ábra

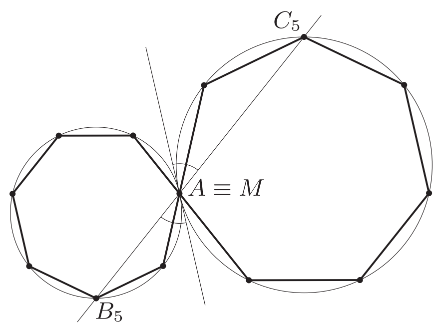


3. ábra

Az előző bekezdésben leírtak $M \equiv A$ esetén is igazak, csak azt kell meggondolnunk, hogy ekkor $AMB_i\sphericalangle$ és $AMC_i\sphericalangle$ a megfelelő érintőszárú kerületi szögeket jelöli (*4.* és *5. ábra*).



4. ábra



5. ábra

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A megoldás során nem használtuk ki, hogy a sokszögek oldalszáma 7. Ugyanezzel a gondolatmenettel belátható az állítás tetszőleges n-szögekre is. Sőt tulajdonképpen azt bizonyítottuk be, hogy ha tekintjük az egymást az A pontban metsző k_B és k_C körvonalak azon B_φ és C_φ pontjait, melyekre az ugyanolyan irányítású AB_φ és AC_φ ívekhez tartozó középponti szögek megegyeznek, akkor a $B_\varphi C_\varphi$ egyenesek átmennek k_B és k_C másik (esetleg A-val egybeeső) metszéspontján.