**Megoldás.** Az első egyenletet alakítva: $y^2 = x(x-1)(x-2)$. A bal oldal nemnegatív, tehát a jobb oldal is: $x \in [0;1] \cup [2;+\infty[$. A második egyenletből ugyanígy $y \in [0;1] \cup [2;+\infty[$.

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$y^2 - x^2 = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 2x - 2y.$$

Rendezzük, majd bontsuk szorzattá a jobb oldalt:

$$\begin{aligned}
0 &= x^3 - y^3 - 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y,\\
0 &= (x-y)\big(x^2+xy+y^2\big) - 2(x-y)(x+y) + 2(x-y),\\
0 &= (x-y)\big(x^2+xy+y^2-2x-2y+2\big),\\
0 &= (x-y)\big[(x-1)^2+(y-1)^2+xy\big].
\end{aligned}$$

Egy szorzat akkor 0, ha egyik tényezője 0.

*I. eset:* $x-y=0$. Ekkor $x=y$, és az eredeti egyenletek alapján:

$$x^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad \text{amiből} \quad 0 = x^3 - 4x^2 + 2x = x\big(x^2-4x+2\big).$$

Ebből $x_1 = y_1 = 0$, illetve

$$x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Vagyis $x_2 = y_2 = 2-\sqrt{2}$ és $x_3 = y_3 = 2+\sqrt{2}$.

*II. eset:* $(x-1)^2 + (y-1)^2 + xy = 0$. Tudjuk, hogy $(x-1)^2 \ge 0$, $(y-1)^2 \ge 0$ és mivel $x$ és $y$ is nemnegatív, ezért $xy \ge 0$. A három összege csak akkor lehet 0, ha mindhárom tag 0. Az első két tagból $x=y=0$, ám ekkor $xy = 1 \ne 0$.

Ebben az esetben nem kaptunk megoldást.

*Megjegyzések.* 1. Sokan azt írták, hogy mivel a két egyenlet szimmetrikus, ezért $x=y$. Ez nem feltétlenül igaz. Lásd pl. *Ábrahám Gábor:* Az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek c. cikkét (KöMaL, 2010. december, és `www.komal.hu/cikkek/abraham/abraham.h.shtml`).

2. A szorzattá bontás után többen $x$-re rendezték a második tényezőt, majd felírták a megoldóképletet: $x^2 + (y-2)x + \big(y^2 - 2y + 2\big) = 0$, amiből

$$x = \frac{-y+2 \pm \sqrt{(y-2)^2 - 4(y^2-2y+2)}}{2} = \frac{-y+2 \pm \sqrt{-3y^2+4y-4}}{2}.$$

A gyökjel alatti kifejezés diszkriminánsa $D = 16 - 48 < 0$, ezért ekkor nincs megoldás.

3. Azt, hogy $x$ és $y$ nem lehet negatív, többen úgy látták be, hogy ha pl. $x<0$, akkor $x^3 < 0$, $-3x^2 < 0$ és $2x < 0$, így ezek összege is negatív lenne, ám $y^2 \ge 0$ miatt ez nem lehetséges.