I. megoldás. A gravitációs erőtörvény nagyon hasonló az elektrosztatika Coulomb-törvényéhez:

$$F_{\text{grav.}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad F_{\text{elekt.}} = +\gamma k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}.$$

Ez azt jelenti, hogy a gravitációs kölcsönhatást „helyettesíthetjük” elektrosztatikus kölcsönhatással, hiszen ha minden testnek a tömegével arányos,

$$Q = \sqrt{\frac{\gamma}{k}}\, M$$

nagyságú töltést adunk, akkor az ezen töltések között ható elektromos erő (az előjeltől, tehát az erő irányításától eltekintve) éppen akkora lesz, mint amekkora eredetileg a gravitációs erő volt.

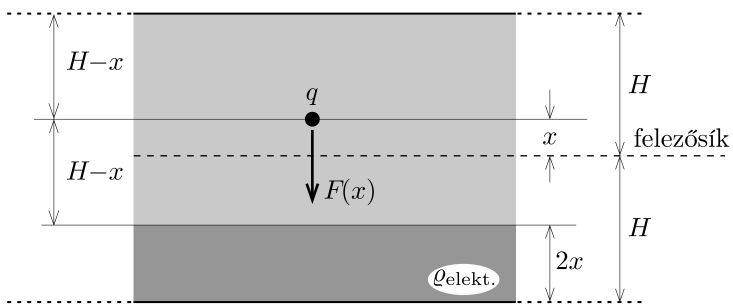
Feladatunk tehát átfogalmazható: Mekkora periódusidejű rezgőmozgást végez egy m tömegű, $q = -\sqrt{\gamma/k} \cdot m$ töltésű test egy nagyméretű (végtelen nagynak tekinthető), de az átmérőjéhez képest csekély vastagságú, egyenletesen feltöltött,

$$\varrho_{\text{elekt.}} = \sqrt{\frac{\gamma}{k}}\, \varrho_{\text{tömeg}}$$

töltéssűrűségű korong belsejében? (A gravitációs és az elektrosztatikus erőhatás eltérő irányát a q töltés negatív előjelével vettük figyelembe.)

Jelöljük a korong vastagságát $2H$-val, a test és a korong felezősíkjának távolságát pedig x-szel (*1. ábra*)! Számítsuk ki a testre ható $F(x)$ erőt, és ha azt találjuk, hogy $F = -D \cdot x$, akkor (a rugóhoz kapcsolt test rezgésidő-képlete alapján) megállapíthatjuk, hogy a periódusidő

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}.$$



1. ábra

A q töltésű test egyik oldalán $H - x$, a másik oldalon pedig $H + x$ vastag töltésréteg található. Ha az utóbbit kettéosztjuk egy $H - x$ és egy $2x$ vastag rétegre, akkor az egyforma vastag rétegek erőhatása kiejti egymást, és a q töltésre ható eredő erő a $2x$ vastagságú (az ábrán sötétebben jelölt) réteg járulékával egyezik meg.

A $2x$ vastag, A alapterületű korong térfogata $2xA$, ebben $Q = 2xA\varrho_{\text{elekt.}}$ töltés található, amiből (Gauss törvénye szerint) $4\pi k Q$ nagyságú elektromos fluxus indul ki. Ez a fluxus $2A$ nagyságú felületen hagyja el a töltött korongot, az elektromos térerősség (amely a szimmetria miatt mindenhol ugyanakkora nagyságú) a korong mindkét oldalán

$$E = 4\pi k \frac{2xA\varrho_{\text{elekt.}}}{2A} = 4\pi k \varrho_{\text{elekt.}} \cdot x.$$

Ebben az elektromos térben a q töltésű testre

$$F(x) = qE = 4\pi k \varrho_{\text{elekt.}} q \cdot x = -4\pi k \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \varrho_{\text{tömeg}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{k}}\, m = -4\pi\gamma m \varrho_{\text{tömeg}} \cdot x$$

erő hat. Leolvashatjuk, hogy a „rugóállandó”

$$D = 4\pi\gamma m \varrho_{\text{tömeg}},$$

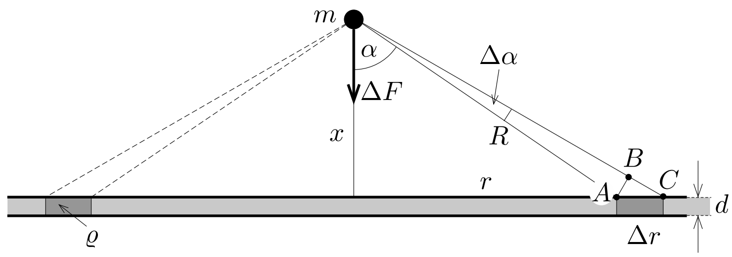
tehát a keresett periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma\varrho_{\text{tömeg}}}} = \sqrt{\frac{3{,}14}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{-21}}}\ \text{s} = 2{,}85 \cdot 10^{15}\ \text{s},$$

ami körülbelül 90 millió évnek felel meg.

II. megoldás. A feladatot közvetlen számolással, a Newton-féle gravitációs törvény alkalmazásával is meg lehet oldani.

Számoljuk ki először, hogy mekkora gravitációs vonzóerőt fejt ki egy nagy kiterjedésű, de igen vékony, d vastagságú lemez a tőle x távolságban lévő, m tömegű pontszerű testre, ha a lemez anyagának sűrűsége ϱ és $d \ll x$.



2. ábra

Tekintsük a lemez azon darabjait, amelyek a töltés helyéről nézve a lemezre merőleges egyenestől mért α és $\alpha+\Delta\alpha$ közötti szögtartományban látszanak, ahol $\Delta\alpha \ll \alpha$ (*2. ábra*). Ez a – cső alakú – lemezdarabka $\Delta V \approx 2r\pi\Delta r\, d$ térfogatú, ahol $r = \dfrac{x}{\operatorname{tg}\alpha}$ a cső sugara, a falának vastagsága pedig

$$\Delta r = AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{R\cdot\Delta\alpha}{\cos\alpha} = \frac{x}{\cos^2\alpha}\,\Delta\alpha.$$

Ebben a térfogatban összesen

$$\Delta m = \varrho\Delta V = 2x^2\pi\varrho d\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}$$

tömegű anyag található, ami valamekkora ΔF nagyságú gravitációs vonzóerőt fejt ki a cső minden darabkájától $R = x/\cos\alpha$ távol lévő, m tömegű testre. (A Δ jel arra utal, hogy ez az erő nem a teljes lemez, hanem annak csak egy kicsiny része által létrehozott gravitációs vonzással egyenlő.) Mivel a cső alakú anyagmennyiség vonzóereje – szimmetriaokokból – a lemezre merőleges irányú, elegendő a gravitációs erő ezen komponensét kiszámítanunk:

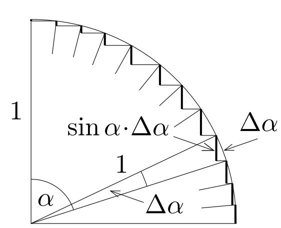
$$\Delta F = \gamma\frac{m\cdot\Delta m}{R^2}\cos\alpha = 2\pi m\varrho d\cdot\sin\alpha\,\Delta\alpha.$$

A lemez teljes vonzóerejét a kis csődarabok járulékának összegzésével kaphatjuk meg. Mivel a nagyon nagy méretű lemez legtávolabbi részei $\alpha \approx \pi/2$ szög alatt látszanak, a kérdéses erő:

$$F = \sum\Delta F = 2\pi m\gamma\varrho d\sum_{\alpha=0}^{\pi/2}\sin\alpha\,\Delta\alpha.$$

A fenti képlet jobb oldalának végén szereplő összeg 1-gyel egyenlő, hiszen a *3. ábrán* látható egységsugarú negyedkörben a vastagon jelölt kis szakaszok összege éppen a negyedkör sugarával egyezik meg. A d vastagságú lemez által kifejtett vonzóerő tehát:

$$F(d) = 2\pi m\gamma\varrho\cdot d.$$



3. ábra

Vegyük észre, hogy a vonzóerő nem függ a lemeztől mért x távolságtól, így a képlet akkor is érvényes, ha d nem kicsi x-hez képest. (Egy vastagabb lemez sok vékony, párhuzamos darabra osztható, és mivel mindegyikük gravitációs vonzóereje a lemezvastagsággal arányos, ugyanez teljesül az összegzéssel kapható eredőjükre is.)

Most már minden rendelkezésünkre áll, hogy kiszámíthassuk, mekkora erőt fejt ki egy nagyon nagy méretű, $2H$ vastagságú, átlagosan ϱ tömegsűrűségű, korong alakú anyageloszlás a szimmetriasíkjától x távolságban lévő m tömegű testre. Mivel a test egyik oldalán $H-x$, a másik oldalon pedig $H+x$ vastag anyagréteg található, az eredő gravitációs erő:

$$F = F(H-x) - F(H+x) = 2\pi m\gamma\varrho\big[(H-x)-(H+x)\big] = -4\pi m\gamma\varrho\cdot x.$$

Ez az erő

$$a = \frac{F}{m} = -\omega^2 \cdot x$$

gyorsulást hoz létre, ahol $\omega = \sqrt{4\pi\gamma\varrho}$. Az ilyen erőtörvénynek megfelelő mozgás harmonikus rezgőmozgás: $x(t) = A\sin(\omega t)$, amelynek periódusideje:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma\varrho}} = 90 \text{ millió év.}$$