Megoldás. Jelöljük az ingák hosszát ℓ-lel, a testek tömegét M-mel és m-mel. Feltételezzük, hogy mindkét golyó mérete sokkal kisebb, mint a fonalak hossza, emiatt a matematikai inga közelítés alkalmazható.

Az *a*) esetben a testek ugyanabban a függőleges síkban mozognak. Mivel az ütközési pontig mindkét test

$$h = \ell(1 - \cos 30°) = 0{,}134\,\ell$$

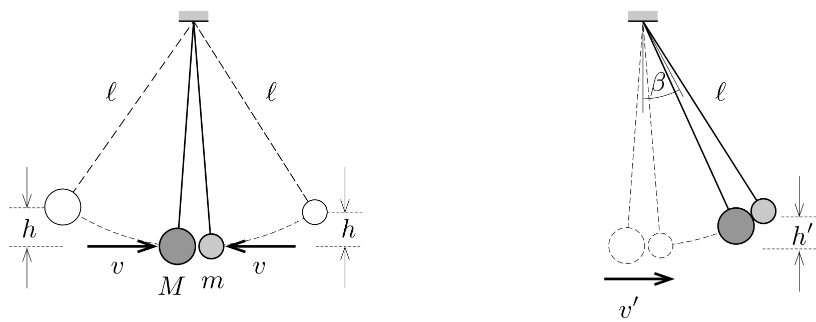
távolsággal kerül mélyebbre, a sebességük az ütközés előtt (az energiamegmaradás törvénye szerint)

$$v = \sqrt{2gh}\,,$$

a rugalmatlan ütközés után pedig (a lendületmegmaradás törvénye alapján)

$$v' = \frac{M - m}{M + m} v = 0{,}733\,v$$

lesz (*1. ábra*).



1. ábra

Ekkora kezdősebességgel a két összetapadt test

$$h' = \frac{v'^2}{2g} = \ell(1 - \cos\beta)$$

magasra emelkedik, ahonnan a legnagyobb kilendülésük szöge

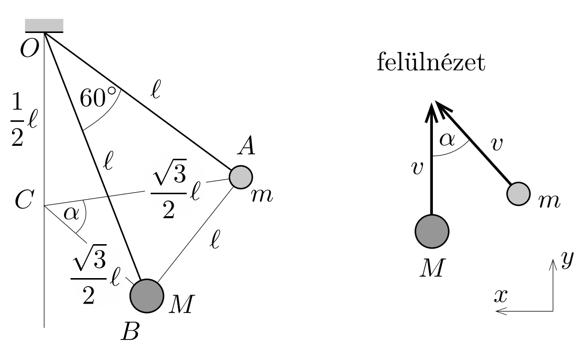
$$\beta = \arccos\left(1 - \frac{v'^2}{v^2}\,\frac{h}{\ell}\right) = \arccos\left(1 - 0{,}733^2 \cdot 0{,}134\right) = 21{,}9°.$$

A *b*) esetben a kitérített ingák mozgásának OBC és OAC síkja nem esik egybe, hanem valamekkora α szöget zár be egymással (*2. ábra*). Mivel az ingák kezdeti kitérítése 60° volt, az ABC egyenlő szárú háromszög szárainak hossza:

$$AC = CB = \ell \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell.$$

Másrészt a kitérített ingák fonalai egymással is 60°-os szöget zárnak be, így OAB egyenlő oldalú háromszög, tehát $AB = \ell$. Az ABC háromszögre felírható koszinusztételből következik, hogy

$$\cos\alpha = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot CB \cdot AC} = \frac{1}{3}, \qquad \text{vagyis} \qquad \alpha = 70{,}5°.$$



2. ábra

Mindkét golyó

$$v=\sqrt{2g\ell(1-\cos 60^\circ)}=\sqrt{g\ell}$$

nagyságú, egymással α szöget bezáró sebességgel érkezik a felfüggesztési pont alá, ott rugalmatlanul ütköznek, majd egy közös, v' nagyságú sebességgel mozognak tovább. A lendületmegmaradás törvénye szerint a közös sebesség x és y komponense (a 2. ábrán látható koordináta-rendszerben):

$$v'_x=\frac{mv\sin\alpha}{M+m},\qquad v'_y=\frac{Mv+mv\cos\alpha}{M+m},$$

a nagysága pedig:

$$v'=\sqrt{{v'}_x^2+{v'}_y^2}=\frac{\sqrt{M^2+m^2+\frac{2}{3}Mm}}{M+m}v=0{,}92\sqrt{g\ell}.$$

A két test kezdősebessége és a legnagyobb kilendülésük β szöge között fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}{v'}^2=g\ell(1-\cos\beta),$$

vagyis

$$\beta=\arccos\left(1-\frac{0{,}92^2}{2}\right)=54{,}7^\circ.$$