I. megoldás. A rúd és a függőleges szögének időbeli változását a

$$\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$$

függvénnyel adhatjuk meg, ahol $\omega = 2\pi f$ az f frekvenciájú rezgés körfrekvenciája. A rúd pillanatnyi szögsebessége:

$$\Omega(t) = \theta_0 \omega \cos \omega t.$$

(Ez a képlet az egydimenziós rezgőmozgás út-idő és sebesség-idő képleteivel való összehasonlításból is megkapható, vagy a $\theta(t)$ függvény deriváltjaként származtatható.)

Tételezzük fel, hogy a gyöngy már egy kicsit felemelkedett az ütközőről, az tehát már nem fejt ki rá erőt. Üljünk rá – képzeletben – az irányát harmonikus rezgőmozgás szerint változtató rúdra, és számítsuk ki a gyöngyszemre ható rúdirányú erőt (annak átlagos értékét) ebben a (gyorsuló!) koordináta-rendszerben!

A nehézségi erő rúdirányú komponense

$$F_1(t) = -mg \cos \theta(t) \approx -mg.$$

(Kihasználtuk, hogy $\left|\theta(t)\right| \leq \theta_0 \ll 1$ miatt $\cos \theta(t) \approx 1$.)

Elhanyagolható súrlódás esetén a rúd nem fejthet ki rúdirányú erőt a gyöngyszemre. Fellép viszont egy rúdirányú tehetetlenségi erő: a gyöngyszemre ható „centrifugális erő”:

$$F_2(t) = mr\Omega^2 = mr\theta_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t,$$

ahol $r \geq d$ a gyöngyszem pillanatnyi távolsága a rúd alsó végétől. Ennek az – időben változó nagyságú – erőnek az átlagértéke (egy periódusra vett időátlaga):

$$\langle F_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F_2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} mr\theta_0^2\omega^2.$$

(Feltételeztük, hogy $r(t)$ csak lassan változik, emiatt egy-egy rezgés ideje alatt r állandónak tekinthető.) Ha az eredő erő (a rúd „felső” vége felé mutató irányt tekintve pozitívnak) nagyobb, mint nulla, akkor a gyöngy lerepül a rúdról. Ha

$$\langle F \rangle = \langle F_1 \rangle + \langle F_2 \rangle = \frac{1}{2} mr\theta_0^2\omega^2 - mg > 0,$$

vagyis

$$f > 2\pi \sqrt{\frac{2g}{r\Theta_0^2}} > 2\pi \sqrt{\frac{2g}{d\Theta_0^2}}$$

teljesül, akkor r növekedni kezd, emiatt az eredő átlagerő még nagyobbá válik, tehát a gyöngy valóban lerepül a rúdról.

II. megoldás. A feladat a talajhoz rögzített (inercia-)rendszerből nézve is megoldató. Írjuk fel a gyöngyre ható eredő erő függőleges komponensét az idő függvényében, és képezzük ennek időbeli átlagát! A kis amplitúdójú harmonikus rezgőmozgást végző gyöngy mozgásegyenletéből leolvashatjuk, hogy (az ütközőtől már kicsit eltávolodott) gyöngyre ható (a rúd által kifejtett) kényszererő függőlegesen felfelé mutató komponense

$$F(t) = m\theta_0^2\omega^2 d \sin^2(\omega t).$$

Ha ennek egy periódusra vett átlagértéke nagyobb, mint mg, akkor a gyöngy lerepül. Mivel $\sin^2(\omega t)$ átlagértéke $1/2$ (lásd pl. a váltóáram effektív értékénél alkalmazott gondolatmenetet), a lerepülés feltétele:

$$f > \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{\theta_0^2 d}}.$$

Megjegyzés. Többen így érveltek: a gyöngy lerepülésének feltétele, hogy a pályájának tetőpontján éppen elváljon az ütközőtől. Az ebből a feltételből kapható naiv

$$f > \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\theta_0^2 d}} = f_{\text{naiv}}$$

egyenlőtlenség azonban – mint az a részletes számításból látható – hibás! Mindaddig, amíg

$$f_{\text{naiv}} < f < \sqrt{2} f_{\text{naiv}},$$

a gyöngy csak egy rövid időre távolodik el az ütközőtől, de utána visszaesik rá, így csak „pattog” a gyöngy az ütközőn, de nem repül le a rúdról.