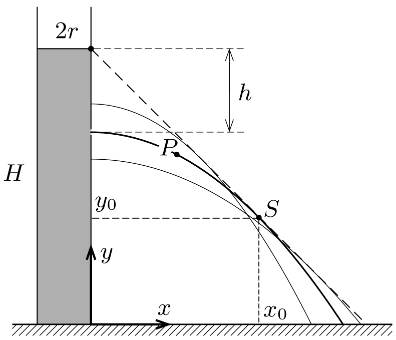
I. megoldás. A kiáramló vízsugarak burkolófelülete a henger tengelyére nézve forgásszimmetrikus felület. Tekintsük ennek a felületnek egy, a henger tengelyére illeszkedő síkmetszetét (*1. ábra*), és használjuk az ábrán látható koordináta-rendszert!



1. ábra

Keressünk összefüggést egy adott $H-h$ magasságból kiinduló vízsugár tetszőleges P pontjának (x, y) koordinátái között! Ehhez vizsgáljuk a vízsugár mozgását a P pontig! A kiáramló víz egy kicsiny darabkájának („vízcseppjének”) kezdősebessége a Torricelli-féle kiáramlási törvény szerint: $v=\sqrt{2gh}$, a P pontig tehát ez a vízcsepp

$$t=\frac{x}{\sqrt{2gh}}$$

idő alatt érkezik el. Ennyi idő alatt a vízcsepp függőleges irányban $\frac{g}{2}t^2$ távolságnyit esik, tehát a P pontban

$$y=H-h-\frac{g}{2}t^2=H-h-\frac{g}{2}\,\frac{x^2}{2gh},$$

így a P pont derékszögű koordinátái között fennáll az

$$x^2=4h(H-h-y)$$

összefüggés.

Keressük meg ezek után egy adott y_0 magasságban azt a pontot, amelyhez tartozó vízsugaraknak megfelelő x koordináta a lehető legnagyobb. A maximális $x=x_0$ megadja a burkolófelület $y=y_0$-lal jellemzett S pontjának másik koordinátáját. Teljes négyzetté alakítással:

$$x^2=4h(H-h-y_0)\equiv-\big[2h-(H-y_0)\big]^2+(H-y_0)^2\le(H-y_0)^2\equiv x_0^2,$$

vagyis $H-y_0=x_0$.

A burkolófelület (az ábrán szaggatott vonallal jelölt) alkotójának egyenlete ezek szerint $x+y=H$. Az alkotók tehát 45°-os szöget zárnak be a vízszintes talajjal, és az alkotók együttesen csonkakúpot formáznak. A csonkakúp fedőkörének sugara a henger r sugarával egyezik meg, az alapkörének sugara pedig $r+H$.

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit használva a víz felszínétől h távolságban lévő lyukból kiinduló vízsugár egyenlete:

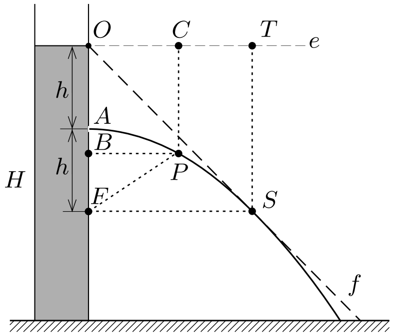
$$H-y=\frac{x^2}{4h}+h.$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^2}{4h}+h\ge2\sqrt{\frac{x^2}{4h}\cdot h}=x.$$

A vízsugarak által elért pontokra tehát fennáll a $H-y\ge x$ egyenlőtlenség. A vízsugarak burkolófelülete ezek szerint egy olyan csonkakúp, amelynek alkotói 45°-os szöget zárnak be a vízszintessel, felső körlapja pedig éppen a víz felszínének magasságában van, és a mérete is megegyezik a vízfelszín átmérőjével.

III. megoldás. Tekintsük a *2. ábrán* látható A pontnál lévő lyukon kiáramló vízsugarat, amelyik (a tömegpontok vízszintes hajításának parabolapályájához hasonlóan) parabola alakú ívet rajzol ki. Keressük meg ezen parabola fókuszpontját és vezéregyenesét!



2. ábra

A kiáramlás v_0 sebessége megegyezik azzal a sebességgel, amekkorával egy szabadon eső test $OA = h$ távolság megtétele után rendelkezne. (Ez az energiamegmaradás törvényéből következik, hiszen egy kicsiny Δm tömegű vízmennyiség kifolyásakor a maradék víz helyzeti energiája éppen annyival csökken, mintha a Δm tömeg a víz felszínétől a kiáramlási nyílásig süllyedt volna le, és a helyzeti energia csökkenése fedezi a kiáramló víz mozgási energiáját. Az energiamegmaradás ezen esetét fogalmazza meg a Torricelli-törvény, általánosabban pedig a Bernoulli-törvény, mindkettő szerint $v_0 = \sqrt{2gh}$.)

Ismert (lásd pl. a **P. 4565.** feladat megoldását a KöMaL 2014. évi 2. számában), hogy egy adott A pontból adott kezdősebességgel elhajított testek parabolapályájának fókuszpontja és az A pont távolsága *nem függ* a kezdősebesség irányától. Ha a vízsugár nem vízszintesen, hanem függőlegesen felfelé indulna el az A pontból, akkor (a súrlódási veszteségeket elhanyagolva) éppen az O pontig, tehát a víz felszínéig emelkedne. Ez a (függőleges és egyenes) pálya olyan elfajult parabolának tekinthető, amelynek fókuszpontja O, tehát $OA = h$ távol van a kiindulási ponttól.

A vízsugár tényleges (vízszintesen induló) pályája olyan parabola, amelynek F fókuszpontja – a szimmetria és a hivatkozott tulajdonság miatt – éppen az A pont alatt, attól h távolságban található. A parabola szimmetriatengelye függőleges, vezéregyenese (e) tehát vízszintes, és A-tól $AF = h$ távol helyezkedik el.

A parabolaív tetszőleges P pontjára fennáll, hogy $FP = PC$ (ez a parabola geometriai definíciójából következik), és nyilván teljesül, hogy $FP \geq BP$ (ahol B a P pont merőleges vetülete a henger palástján). Az egyenlőtlenség annál az S pontnál válik egyenlőséggé, amelyik a parabola F fókuszpontjával azonos magasságban található.

Megállapíthatjuk, hogy a különböző magasságban lévő lyukakból kiinduló vízsugarak minden pontja az O pontból induló, 45° meredekségű (az ábrán szaggatott vonallal jelölt) f egyenes *alatt* (vagy esetleg éppen azon rajta) található. A vízsugarak burkolófelülete tehát az f egyenes megforgatásával kapható csonkakúp.

Megjegyzés. A megoldás során feltételeztük, hogy a mérőhenger egy vízszintes asztalon áll, és emiatt a vízsugarak ívét csak az asztal fölötti térrészben vizsgáltuk. A burkolófelület teljes csonkakúpját már a mérőhenger felső felén lévő ($h \leq H/2$-vel jellemezhető) lyukakból kiáramló víz kirajzolja, a henger alsó felén lévő lyukakat akár el is hagyhatjuk.

Több versenyző is vizsgálta a mérőhenger alaplapja *alá* kerülő vízsugarakat. (Ilyen vízsugarak például úgy jöhetnek létre, hogy a mérőhengert egy vékony, függőleges rúd tetejére erősítjük.) Megállapították, hogy a burkolófelület ilyenkor egy csonkakúpból és egy ahhoz illeszkedő forgásparaboloidból tevődik össze, az utóbbit a henger legaljánál kifolyó vízsugarak hozzák létre.