Fehér Zsombor megoldása. Legyen $c_j = a_j + j$. Ekkor az (i) feltétel azt mondja ki, hogy $j+1 \le c_j \le j+2015$, a (ii) feltétel pedig azt, hogy a c_j számok mind különbözőek.

Megmutatjuk, hogy a $c_1, c_2, \dots$ sorozat véges sok kivétellel minden pozitív egész számot felvesz. Tegyük fel ugyanis, hogy legalább 2016-ot nem vesz fel, és legyen t egy olyan pozitív egész, ami nagyobb ennél a 2016 számnál. Ekkor az (i) feltétel alapján a $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ halmaz minden eleme az $[1, t+2015]$ intervallumba esik, és mivel (ii) szerint t különböző elemről van szó, ezért ebből az intervallumból $\{c_1, c_2, \dots, c_t\}$ éppen 2015 pozitív egész számot nem vesz fel. Azonban feltevésünk szerint az ennél bővebb $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz legalább 2016 darab t-nél kisebb pozitív egész számot nem vesz fel, ami pedig ellentmondás.

A feladatnak megfelelő b számot válasszuk meg annyinak, amennyi a $c_1, c_2, \dots$ sorozat által fel nem vett pozitív egészek száma, N pedig legyen egy olyan szám, ami nagyobb ennél a b darab kimaradó számnál. A fenti gondolatmenetből az is látható, hogy $b \le 2015$. Az m, n pozitív egészekre a továbbiakban feltesszük, hogy $N \le m < n$.

A feladatunk lényegében az, hogy egy $\sum a_j$ kifejezést megfelelő korlátok közé szorítsunk, ami nyilván ugyanaz, mint $\sum c_j$ megfelelő korlátok közé szorítása. Tudjuk, hogy $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ minden eleme az $[m+2, n+2015]$ intervallumba esik, és mivel ezen intervallum $n-m+2014$ egész számából $n-m$ van az előző halmazban, ezért 2014 egész szám marad ki. Vizsgáljuk meg közelebbről ezt a 2014 számot: ki fog derülni, hogy közülük $b-1$ darab az $[m+2, n+2015]$ intervallum „elején", $2015-b$ pedig a „végén" helyezkedik el.

Mivel a $\{c_1, c_2, \dots\}$ halmaz b darab egész számot nem vesz fel az $[1, \infty)$ intervallumból, ezért a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b+m$ számot nem vesz fel $[1, \infty)$-ből. Ez $c_j > j$ alapján azt jelenti, hogy a $\{c_{m+1}, c_{m+2}, \dots\}$ halmaz $b-1$ számot nem vesz fel $[m+2, \infty)$-ből. Mivel azonban $m+2 > N$, ezért ezen $b-1$ számot is felveszi valahol a $c_1, c_2, \dots$ sorozat, csak még c_{m+1} előtt. Így ez a $b-1$ szám mindegyike olyan c_k, melyre $k \le m$, így $c_k \le k+2015 \le m+2015$ alapján ezek a számok mind az $[m+2, m+2015]$ intervallumba esnek.

Tehát azon 2014 egész közül, melyek az $[m+2, n+2015]$ intervallumban benne vannak, de a $\{c_{m+1}, \dots, c_n\}$ halmazban nem, $b-1$ darab az $\{c_1, \dots, c_m\}$ halmazban van, a maradék $2015-b$ darab pedig szükségképpen a $\{c_{n+1}, \dots\}$ halmazban. Ezen $2015-b$ szám mindegyike legalább $n+2$, így ezek az $[n+2, n+2015]$ intervallumba esnek.

Ezen a ponton álljunk meg egy pillanatra, és vegyük észre, hogy a feladat megoldásával lényegében készen vagyunk. Csak az alapján, hogy a 2014 kimaradó szám valahol az $[m+2, n+2015]$ intervallumban van, még nem tudnánk pontos becslést mondani, hiszen m, n-et kicsivel megváltoztatva az egyik kimaradó szám szabadon „átugorhatna" az intervallum elejéről a végére, ezzel nagy ($n-m$ nagyságrendű) változást eredményezve. De azáltal, hogy a 2014 kimaradó szám közül mindig $b-1$ van az intervallum elején, és $2015-b$ a végén (ahol a b egy univerzális paramétere a sorozatnak!), ilyen ugrások nem történhetnek meg, csak az intervallum szélein lévő rövid (2014 hosszú) intervallumok belsejében mozoghatnak a kimaradó számok. Így lehetséges az, hogy m, n-től független, 1007^2 nagyságrendű becslést fogunk tudni mondani.

Nem maradt más hátra, minthogy kiszámoljuk a 2014 kimaradó szám összegének lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét, majd ezt visszavezessük a feladatbeli összegre. Tudjuk, hogy a 2014 szám felbontható valahogy egy $b-1$ és egy $2015-b$ elemű csoportra, melyek elemei rendre az $[m+2, m+2015]$, illetve az $[n+2, n+2015]$ intervallumból valók. (Előfordulhat, hogy ez a két intervallum átfedi egymást, de ez nem okoz gondot.) Mivel a számok különbözőek, ezért a 2014 szám összege legalább

$$\begin{aligned}
&((m+2)+(m+3)+\dots+(m+b))+\\
&+((n+2)+(n+3)+\dots+(n+2016-b))=\\
&=\frac{(b-1)(2m+b+2)}{2}+\frac{(2015-b)(2n+2018-b)}{2}=h_{\min},
\end{aligned}$$

legfeljebb pedig

$$\begin{aligned}
&((m+2017-b)+\dots+(m+2015))+((n+b+1)+\dots+(n+2015))=\\
&=\frac{(b-1)(2m+4032-b)}{2}+\frac{(2015-b)(2n+2016+b)}{2}=h_{\max}.
\end{aligned}$$

Ha H jelöli az előbbi 2014 kimaradó szám összegét, akkor a feladatban szereplő összeg így írható:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)&=\sum_{j=m+1}^{n}(c_j-j-b)=\sum_{i=m+2}^{n+2015} i-H-\sum_{j=m+1}^{n} j-\sum_{j=m+1}^{n} b=\\
&=\frac{(n+2014-m)(n+m+2017)}{2}-H-\frac{(n-m)(n+m+1)}{2}-b(n-m).
\end{aligned}$$

A $h_{\min} \le H \le h_{\max}$ becslést alkalmazva, a kifejezések egyszerűsítése után végül a következőt kapjuk:

$$b^2-2016b+2015 \le \sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b) \le -b^2+2016b-2015.$$

Így tehát valóban,

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n}(a_j-b)\right| \le -b^2+2016b-2015 = 1007^2-(b-1008)^2 \le 1007^2.$$