Williams Kada megoldása. Mindenekelőtt keressük meg (1) lineáris megoldásait, vagyis az $f(x) = ax + b$ alakúakat! Beírva (1)-be, majd kibontva és átrendezve:

$$a\left(x+a(x+y)+b\right)+b+axy+b=x+a(x+y)+b+y(ax+b),$$
$$(*)\qquad \left(a^2-1\right)x+\left(a^2-a-b\right)y+(ab+b)=0.$$

Meggondolható, hogy ez éppen akkor állhat fenn minden x, y-ra, hogyha $(*)$-ban mindhárom együttható nulla, ami csak akkor lehet igaz, ha $(a,b)=(1,0)$ vagy $(-1,2)$, azaz $f(x)=x$ vagy $f(x)=2-x$. Ennek a meggondolása nem tartozik a megoldáshoz, viszont ebből sejthető meg, hogy ez a kettő lesz (1)-nek az összes megoldása. Jól látható, hogy ezeknél $(*)$ együtthatói tényleg mind nullák lesznek, vagyis hogy $f(x)=x$ és $f(x)=2-x$ valóban megoldása (1)-nek.

Helyettesítsünk $x=0$-t, majd pedig $y=1$-et (1)-be, nyerjük:

$$(2)\qquad f\left(f(y)\right)+f(0)=f(y)+yf(0),$$
$$(3)\qquad f\left(x+f(x+1)\right)=x+f(x+1).$$

Kezdésképpen könnyű megtalálni $f(0)$ lehetséges értékeit: írjunk (2)-be előbb $y=0$-t: $f\left(f(0)\right)=0$ adódik, amiért (2)-be most $y=f(0)$-t helyettesítve

$$f\left(f\left(f(0)\right)\right)+f(0)=f\left(f(0)\right)+f(0)^2,$$

azaz $2f(0)=f(0)^2$ adódik, ahonnan $f(0)=2$ vagy $f(0)=0$.

1. eset: $f(0)=2$, itt az $f(x)=2-x$ megoldást várjuk.

Ez az eset egy trükkös észrevétellel elintézhető. Figyeljük meg ugyanis, hogy (3) szerint $x+f(x+1)$ minden x-re fixpontja f-nek. Ellenben a megcélzott $x\mapsto 2-x$ függvénynek csak az 1 a fixpontja. Ha belátnánk, hogy $f(0)=2$ esetén f-nek csak az 1 lehet fixpontja, abból következne, hogy $x+f(x+1)$ fixpont lévén minden x-re, azonosan 1 kell legyen, vagyis $f(x+1)=1-x$ minden x-re, azaz $f(t)=2-t$ bármely t-re ($t:=x+1$).

Belátjuk tehát, hogy $f(0)=2$-re $f(a)=a$-ból $a=1$ következik. Ehhez (2)-t vegyük szemügyre, $y=a$-t helyettesítve: $f\left(f(a)\right)+2=f(a)+2a$, $a=1$ adódik. Ez igazolja, hogy $f(0)=2$ esetén $f(x)=2-x$.

2. eset: $f(0)=0$, itt az $f(x)=x$ megoldást várjuk.

Ezúttal bonyolultabban járunk el: azt vesszük észre, hogy ha (1)-be x, y helyett $-x$, $-y$-t helyettesítünk, azzal $f(xy)$ ugyanúgy jelen marad, és ezért kiejthetjük:

$$f(xy)=-f\left(x+f(x+y)\right)+\left(x+f(x+y)\right)+yf(x)$$
$$f(xy)=-f\left(-x+f(-x-y)\right)+\left(-x+f(-x-y)\right)-yf(-x).$$

Itt gyakran üti fel fejét $x+y$ és ellentettje, kényelmesebb az $y:=k-x$ jelölést használni:

$$(4)\qquad \begin{gathered}-f\left(x+f(k)\right)+\left(x+f(k)\right)+(k-x)f(x)=\\=-f\left(-x+f(-k)\right)+\left(-x+f(-k)\right)-(k-x)f(-x).\end{gathered}$$

A megoldáshoz először meghatározunk néhány $f(\pm k)$ értéket, majd pedig az adódó összefüggéseket összehasonlítjuk, amikből már némi munka árán kifejezhetjük $f(x)$-et.

Már tudjuk, hogy $f(0)=0$, írjunk hát (4)-be $k=0$-t, rögtön barátságosabb lesz:

$$-f(x)+x-xf(x)=-f(-x)-x+xf(-x),$$
$$(5)\qquad 2x=(x+1)f(x)+(x-1)f(-x).$$

Ha (3)-ba $x=-1$-et írunk, akkor $f(0)=0$ miatt $f(-1)=-1$ nyerhető, illetve (5)-be $x=1$-et írva, megkapjuk, hogy $2=2f(1)$, $f(1)=1$. Vagyis (4)-be már írhatunk $k=1$-et is:

$$-f(x+1)+(x+1)+(1-x)f(x)=-f(-x-1)-(x+1)-(1-x)f(-x).$$

Itt viszont (5) szerint $-(1-x)f(-x)$ helyére $2x-(x+1)f(x)$ írható, vagyis

$$-f(x+1)+2(x+1)=(x-1)f(x)-f(-x-1)+2x-(x+1)f(x),$$
$$2+2f(x)=f(x+1)-f(-x-1).$$

Ha ezt x helyett $x-1$-re írjuk fel, akkor

$$(6)\qquad 2+2f(x-1)=f(x)-f(-x)$$

adódik.

Beszorozva (6)-ot $(x-1)$-gyel, majd hozzáadva (5)-öt:

$$2(x-1)+2(x-1)f(x-1)+2x=(x-1)f(x)+(x+1)f(x),$$
$$(x-1)f(x-1)+(2x-1)=xf(x). \tag{7}$$

Ezután (6)-ba $x=-1$-et írva, $f(-2)=-2$, majd pedig (6)-ba $x=2$-t írva, $f(2)=2$ nyerhető.

A befejezéshez írjunk (4)-be $k=2$-t:

$$-f(x+2)+(x+2)+(2-x)f(x)=-f(-x-2)+(-x-2)-(2-x)f(-x),$$

ahol $f(x+2)-f(-x-2)=2+2f(x+1)$ érvényes (6) szerint, így

$$2(x+2)+(2-x)\cdot(f(x)+f(-x))=2+2f(x+1).$$

Beszorozva $(x+1)$-gyel, (7) miatt adódik:

$$2(x+2)(x+1)-(x-2)(x+1)\cdot(f(x)+f(-x))=2(x+1)+2\left(xf(x)+2x+1\right),$$
$$2(x^2+3x+2)-2(x+1)-2(2x+1)=(x^2-x-2)\left(f(x)+f(-x)\right)+2xf(x),$$
$$2x^2=(x^2+x-2)f(x)+(x^2-x-2)f(-x).$$

Ezt pedig $(x-1)$-gyel tovább szorozva és (5)-öt használva:

$$2x^2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2)f(x)+(x^2-x-2)\left(2x-(x+1)f(x)\right),$$
$$2x^2(x-1)-2x(x^2-x-2)=\left[(x-1)(x^2+x-2)-(x+1)(x^2-x-2)\right]f(x),$$
$$2x\left(x^2-x-(x^2-x-2)\right)=$$
$$=\left[x\left((x^2+x-2)-(x^2-x-2)\right)-\left((x^2+x-2)+(x^2-x-2)\right)\right]f(x),$$
$$4x=\left[x\cdot(2x)-(2x^2-4)\right]f(x),$$

amiből már világos, hogy $f(x)=x$, bármely x-re.

Tehát két megoldásunk van: $f(x)=x$ és $f(x)=2-x$, és ezeket már leellenőriztük.