Szabó Barnabás megoldása. A szokásos módon $v_2(x)$ jelöli egy x pozitív egész prímfelbontásában a 2 hatványkitevőjét. A továbbiakban hivatkozás nélkül fel fogjuk használni azt az ismert állítást, mely szerint $v_2(x) > v_2(y)$ esetén $v_2(x \pm y) = v_2(y)$, és $v_2(x) = v_2(y) = t$ esetén $v_2(x \pm y) \geq t + 1$. Ha $a = 1$, akkor $ab - c$ és $ac - b$ közül az egyik nem pozitív, így nem lehet 2-hatvány. Tehát $a \neq 1$, hasonlóan $b, c \neq 1$.

1. eset: minden változó páros. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $v_2(a) \geq v_2(b) \geq v_2(c) \geq 1$. Ekkor $v_2(ab - c) = v_2(c)$, de $ab - c$ 2-hatvány, így $ab - c \leq c$, azaz $ab \leq 2c$. A $v_2(ac - b) = v_2(b)$ egyenlőségből kapjuk, hogy $ac \leq 2b$. A két egyenlőtlenséget összeszorozva nyerjük, hogy $a \leq 2$, de $a \neq 1$, így $a = 2$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk, hogy $2b \leq 2c$ és $2c \leq 2b$, azaz $b = c$, viszont ekkor $v_2(bc - a) = v_2(b^2 - 2) = 1$, tehát $b^2 - 2 = 2^1$ lesz, ahonnan $b = c = 2$. Az első eset tehát az $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ számhármast adja, ami valóban megfelelő.

2. eset: egyik változó páratlan. Feltehető, hogy c lesz páratlan. Tegyük fel, hogy $v_2(a) \neq v_2(b)$, mondjuk $v_2(a) > v_2(b)$. Ekkor a páros, tehát $ab - c$ páratlan, azaz $ab - c = 1$. Másrészt, $v_2(bc - a) = v_2(b)$, így $bc - a = 2^{v_2(b)}$ osztója b-nek, $bc - a \leq b$. Ekkor $ab - 1 = c \leq \dfrac{b + a}{b} \leq 1 + a$, ahonnan $a(b - 1) \leq 2$, így $a = 2$ és $b = 2$, ami ellentmond $v_2(a) > v_2(b)$-nek.

Tehát $t = v_2(a) = v_2(b)$. Először tegyük fel, hogy $t \geq 1$. Ekkor $2|ab$, így $ab - c = 1$. A c-t behelyettesítve

$$bc - a = ab^2 - (a + b) = 2^x,$$
$$ca - b = a^2 b - (a + b) = 2^y,$$

ahol feltehető, hogy $x \leq y$. A kettőt kivonva, $2^x(2^{y-x} - 1) = ab(a - b)$ adódik. Hogyha $x = y$, akkor $a = b$ lesz, és $a^3 - 2a = a\left(a^2 - 2\right) = 2^x$. Mivel a páros, $v_2(a^2 - 2) = 1$, így $a^2 - 2 = 2^1$, $a = 2$ adódik. Ebből kapjuk a $(3, 2, 2)$ számhármast.

Ha $x < y$, akkor $2^x(2^{y-x} - 1) = ab(a - b)$ miatt $v_2\left(ab(a - b)\right) = x$, de $v_2(a - b) \geq t + 1$, így $x \geq 3t + 1$. Ebből $v_2\left(ab^2 - (a + b)\right) = x \geq 3t + 1$, de $v_2\left(ab^2\right) = 3t$ miatt $v_2(a + b) = 3t$. Másrészt $3t > t + 1$ miatt $v_2(a - b) = v_2\left(2a - (a + b)\right) = t + 1$, azaz $x = v_2\left(ab(a - b)\right) = 3t + 1$. Legyen $ab^2 = 2^{3t}d$ és $a + b = 2^{3t}e$, ekkor az egyenletbe helyettesítve és 2^{3t}-vel osztva $d - e = 2$, tehát $\dfrac{d}{e} \leq 3$, ezért $ab^2 \leq 3(a + b)$. Ebből $b \geq 2$ miatt $a \leq \dfrac{3}{b^2}a + \dfrac{3}{b} \leq \dfrac{3}{4}a + \dfrac{3}{2}$, ahonnan $a \leq 6$. Ha $a = 2$, akkor $2b^2 \leq 6 + 3b$, innen $b = 2$ (hiszen $v_2(b) = 1$), innen ismét kapjuk a $(3, 2, 2)$ számhármast. Hasonló vizsgálattal adódik, hogy $a = 4$ esetén nincs megoldás, míg $a = 6$ esetén kapjuk a $(2, 6, 11)$ hármast.

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor $t = 0$, azaz mindhárom szám páratlan. Legyen $bc - a = 2^x$, $ca - b = 2^y$, $ab - c = 2^z$. Feltehető, hogy $x \leq y \leq z$. Ekkor $2^y \mid (ab - c) - (ac - b) = (b - c)(a + 1)$ és $2^y \mid (ab - c) + (ac - b) = (b + c)(a - 1)$. Nyilván $v_2(b - c) = 1$ vagy $v_2(b + c) = 1$, innen $a \geq 2^{y-1} - 1$. Viszont $(a + b)(c - 1) = 2^x + 2^y \leq 2^{y+1}$, de $a + b \geq 2^{y-1}$, tehát $c \leq 5$. $c = 5$ esetén $b = 1$ lenne, ami ellentmondás. Tehát csak $c = 3$ lehetséges. Mivel $b > 1$, így $a < 2^y - 1$ tehát $a = 2^{y-1} + 1$ vagy $a = 2^{y-1} - 1$. Az előbbi esetből egyszerű számolás után ellentmondásra jutunk, míg az utóbbiból a $(3, 5, 7)$ megoldást kapjuk, ami valóban jó. A megoldások tehát: $(2, 2, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(2, 6, 11)$ és $(3, 5, 7)$ és persze ezek permutációi.