Nagy Róbert megoldása. Először olyan húrokat vizsgálunk, melyek végpontjain az összeg k – nevezzük ezeket k-húroknak.

Lemma. *Egy szép elrendezésben bármely három húrra teljesül, hogy az egyik elválasztja a másik kettőt.*

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk n szerint. Ha $n \leq 3$, akkor az állítás triviális. Legyen $n \geq 4$, és bizonyítsunk indirekten.

Tegyük fel, hogy létezik három olyan húr, melyek „nem elválasztóak". Legyenek a három húr végpontjai: ab, cd, ef, ahol ezek a végpontokra írt számokat is jelölik. Ekkor ha n nem szerepel a hat végpont között, akkor n-et elhagyva a körről továbbra is szép elrendezést kapunk, melyben csak $(n-1)$-ig vannak az elemek. Erre már beláttuk, hogy teljesül az állítás, tehát ez ellentmondás. Ugyanígy, ha 0 nem szerepel a húr végpontok között, akkor ezt elhagyva és minden pont értékét eggyel csökkentve is szép elrendezéshez jutunk, melyben a legnagyobb elem megint csak $n-1$, ami ellentmondás.

Tehát a 0 és az n elemek is a húrok végpontjai között vannak. Vegyük észre, hogy az n és a 0 azonos húrok végpontjai, különben: $n+b > n > 0+d$, tehát $k=n$.

Legyen A, B, C a három húr, mely nem elválasztó. Ezek közül legyen C az, melynek két végpontja 0 és n. Ekkor vegyük azt a D húrt, mely közvetlenül a C húr mellett van, azonos oldalon az A és B húrokkal. Ennek két végpontja legyen u és v, $u+v=t$.

Ha $t=n$, akkor a C húr két végpontját elhagyva és az összes elemet eggyel csökkentve megint olyan elrendezést kapunk, amire már beláttuk az állítást az indukció miatt.

Ha $t<n$, akkor t nyilvánvalóan a C húr másik oldalán van, hiszen különben a D húr és a $\{0,t\}$ húr metsző lenne. Így $(n-t)$ (hiszen t, $n-t$ nem metsző C-vel) is C másik oldalán van, ekkor viszont a C húr végpontjait elhagyva megint kapunk három húrt, melynek végpontjain a számok összege megegyező és nem szétválasztóak. De $(n-2)$-re már beláttuk az állítást az indukció miatt.

Ha $t>n$, akkor vegyünk minden x szám helyett $n-x$-et. Vegyük észre, hogy ekkor az elrendezés nyilvánvalóan továbbra is szép lesz, és ekkor visszakapjuk az előző esetet. Tehát beláttuk, hogy minden elrendezésben a k-húrok szétválasztóak. $\square$

Bizonyítsuk az eredeti állítást teljes indukcióval. $n=2$-re az állítás nyilvánvaló. Ezek után legyen $n \geq 3$. Legyen S egy szép elrendezés $0,\ldots,n$ számozással. Ekkor ha n-et elhagyjuk, akkor kapunk egy T szép elrendezést $0,\ldots,n-1$ számozással. Az n-húrok T-ben szétválasztóak, így 0-n kívül minden pontnak van párja. Legyen T 1-es típusú, ha 0 két n-húr között van, és legyen T 2-es típusú, ha nem, tehát a 0-t egy húr választja el a többitől.

Megmutatjuk, hogy minden 1-es típusú T elrendezés pontosan egy S elrendezésből származik, míg minden 2-es típusú elrendezés 2 különböző 2-es S elrendezésből ered.

Ha T 1-es típusú, akkor legyen 0 az A, B n-húrok között. Mivel az n-húrok szétválasztóak, ezért a T elrendezésből egyértelműen visszakaphatjuk az S elrendezést, mivel az n pontnak A, B másik végpontjai közötti íven kell lennie. Ha belátjuk, hogy egy 1-es típusú T elrendezésbe a megfelelő helyre visszarakva n-t egy megfelelő S-t kapunk, akkor készen vagyunk, hiszen a másik irány nyilvánvaló. Ha $0<k<n$, akkor nyilván teljesül az állítás, hiszen a T-ben levő k-húrok S-ben is azok.

Ha $n<k<2n$, akkor az n-húrok párhuzamosak az elrendezés miatt, tehát létezik egy l tengely, melyre x és $n-x$ szimmetrikusak. Ha lenne két k-húr, mely metsző, akkor az l-re szimmetrikus párjai is metszők, de ezekben a húrok végén levő számok összege $2n-k<n$, ami ellentmondás.

Ha T 2-es típusú, akkor ugyanígy megy a bizonyítás, csak az n-et a 0 mindkét oldalára be tudjuk rakni, tehát kétszer annyi eset keletkezik.

Legyen M_n a szép elrendezések száma $0,\ldots,n$ számozással, és legyen L_n a 2-es típusú szép elrendezések száma $0,\ldots,n$ számozással. Ekkor

$$M_n = (M_{n-1} - L_{n-1}) + 2L_{n-1} = M_{n-1} + L_{n-1}.$$

Tehát elég belátni az indukció miatt, hogy L_{n-1} azon (x,y) párok száma, melyre $x+y=n$ és $\operatorname{lnko}(x,y)=1$. Ahhoz, hogy ezt belássuk, vegyünk egy 2-es típusú szép elrendezést $0,\ldots,n-1$ számozással. Számozzuk a helyeket a $0,1,2,\ldots,(n-1)$-gyel $(\bmod n)$, mégpedig úgy, hogy a 0 elem a 0-s helyen legyen.

Legyen $F(i)$ az i-edik pozícióban levő elem értéke. f egy permutációja a $[0,n-1]$-nek. Legyen $f(a)=n-1$. Mivel az n-húrok szétválasztóak 0-val, és minden pont valamely húrnak az eleme, azért az n-húrok párhuzamosak egymással, így $f(i)+f(-i)=n$ minden i-re.

Mivel az $n-1$ húrok is szétválasztóak, és minden pont valamely húrnak az eleme, ezek a húrok is párhuzamosak, így $f(a-1)=f(-i)-1$ minden i-re, és mivel $f(0)=0$, azért $f(-ak)=k$ minden k-ra. Ez egy egyenlőség modulo n, és f az $0,\ldots,n-1$ elemek egy permutációja, így $(a,n)=1$. Tehát $L_{n-1} \leq \varphi(n)$.

Már csak azt kell belátnunk, hogy ezek az esetek valóban megoldások. Ehhez vegyünk négy számot a körön, melyekre teljesül, hogy $w+y=x+z$. Ekkor a pozíciókra teljesül, hogy $(-aw)+(-ay)=(-ax)+(-az)$, ami azt jelenti, hogy a wy és xz húrok párhuzamosak, tehát az elrendezés valóban szép, így beláttuk az állítást.