Janzer Olivér megoldása. Jelöljük a-val azt az (egyik) 1-nél nagyobb racionális számot, melyre $f(a)=a$. (i)-be $x=a$-t és $y=1$-et helyettesítve $f(a)f(1)\geq f(a)$, azaz $af(1)\geq a$. Mivel $a>1$, azért leoszthatunk, így $f(1)\geq 1$. Bebizonyítjuk n szerinti teljes indukcióval, hogy ha n pozitív egész, akkor $f(n)\geq n$. $n=1$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n\leq k$-ig már beláttuk, bizonyítunk $n=k+1$-re. (ii)-be $x=k$-t és $y=1$-et helyettesítve

$$f(k+1)\geq f(k)+f(1)\geq k+1,$$

így az indukciós lépést befejeztük. Tehát pozitív egész n-ekre $f(n)\geq n$.

Vegyünk egy tetszőleges $\frac{p}{q}$ pozitív racionális számot (p és q pozitív egészek). Ekkor (i)-be $x=\frac{p}{q}$-t és $y=q$-t helyettesítve

$$f\left(\frac{p}{q}\right)f(q)\geq f(p).$$

$f(q)\geq q$ és $f(p)\geq p$, így $f(q)$ és $f(p)$ is pozitív. Így $f\left(\frac{p}{q}\right)$ is pozitív kell legyen. Tehát minden $x\in Q_{>0}$-ra $f(x)>0$. Így (ii)-ből

$$f(x+y)\geq f(x)+f(y)>f(y),$$

tehát a függvény szigorúan monoton nő. (Ha $x_1>x_2$, akkor $x=x_1-x_2$, $y=x_2$ helyettesítésekkel $f(x+y)>f(y)$-ból $f([x_1-x_2]+x_2)>f(x_2)$, azaz $f(x_1)>f(x_2)$.)

Most n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $f(a^n)\leq a^n$, ha n pozitív egész. $n=1$ esetén $f(a)=a\leq a$. Bizonyítunk $n=k$-ról $n=k+1$-re. (i)-be $x=a^k$-t és $y=a$-t helyettesítve $f(a^k)f(a)\geq f(a^{k+1})$. Így, mivel $f(a^k)\leq a^k$ és $f(a)=a$, azért $f(a^{k+1})\leq a^{k+1}$.

Tegyük fel, hogy valamilyen $x_0\in Q_{>0}$ esetén $f(x_0)>x_0$. Legyen ekkor $f(x_0)=x_0+c$, ahol $c>0$. n szerinti teljes indukcióval igazoljuk, hogy $f(nx_0)\geq nx_0+nc$, ha n pozitív egész. $n=1$-re valóban $f(x_0)=x_0+c\geq x_0+c$. Bizonyítunk $n=k$-ról $n=k+1$-re. (ii)-be $x=kx_0$-t és $y=x_0$-t helyettesítve

$$f([k+1]x_0)\geq f(kx_0)+f(x_0)\geq(kx_0+kc)+(x_0+c)=(k+1)x_0+(k+1)c.$$

Az indukciós lépést befejeztük, $f(nx_0)\geq nx_0+nc$.

Mivel c és x_0 pozitív számok, így van olyan K pozitív szám, melyre $Kc>x_0$. Minthogy $a>1$, ezért van olyan n pozitív egész, amelyre teljesül $(K+1)x_0<a^n$. x_0 pozitív szám, így egyértelműen létezik olyan k egész, melyre

$$kx_0\leq a^n<(k+1)x_0.$$

Így $(K+1)x_0<a^n<(k+1)x_0$, amiből $K<k$. Így, mivel K pozitív, ezért k is, azaz k pozitív egész. Mivel f szigorúan monoton nő, ezért $kx_0\leq a^n$-ből $f(kx_0)\leq f(a^n)$. Korábban belátott állításunk szerint viszont $f(kx_0)\geq kx_0+kc$, illetve $f(a^n)\leq a^n$, így

$$kx_0+kc\leq f(kx_0)\leq f(a^n)\leq a^n.$$

Mivel $a^n<(k+1)x_0$, azért $kx_0+kc<(k+1)x_0$, amiből $kc<x_0$. Azonban $K<k$ és $Kc>x_0$, ami $c>0$ miatt ellentmond $kc<x_0$-nak. Így ellentmondásra jutottunk, azaz feltevésünkkel szemben nincsen olyan $x_0\in Q_{>0}$, amelyre $f(x_0)>x_0$. Tehát $x\in Q_{>0}$ esetén $f(x)\leq x$.

Azt azonban tudjuk, hogy $f(n)\geq n$, ha n pozitív egész. Így $n\leq f(n)\leq n$, tehát $f(n)=n$. Vegyünk egy tetszőleges $\frac{p}{q}$ pozitív racionális számot (p és q pozitív egészek). Ekkor (i)-be $x=\frac{p}{q}$-t és $y=q$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$f\left(\frac{p}{q}\right)f(q)\geq f(p).$$

Mivel $f(q)=q$ és $f(p)=p$, azért

$$f\left(\frac{p}{q}\right)q\geq p,\quad \text{amiből}\quad f\left(\frac{p}{q}\right)\geq\frac{p}{q}.$$

Ezt összevetve $f(x)\leq x$-szel azt kapjuk, hogy $f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$. Így a feladat állítását igazoltuk.