Szabó Attila megoldása. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $A_1B_1C_1$ kör P középpontja a körülírt kör B-t nem tartalmazó AC ívén van. A háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon jelöljük, félkerülete s, területe t, beírt és körülírt körének sugara rendre ϱ és R. Legyenek a PA, PB, PC szakaszok látószögei rendre $PBA\sphericalangle = PCA\sphericalangle = \alpha'$, $PCB\sphericalangle = \pi - PAB\sphericalangle = \beta'$ és $PAC\sphericalangle = PBC\sphericalangle = \gamma'$. Ekkor a szinusztétel miatt

$$PA = 2R\sin\alpha', \quad PB = 2R\sin\beta', \quad PC = 2R\sin\gamma', \tag{1}$$

a következő összefüggések egyszerű szögszámolással adódnak:

$$\pi - \beta' = \alpha + \gamma', \quad \beta = \alpha' + \gamma', \quad \beta' = \gamma + \alpha'. \tag{2}$$

Ismert továbbá, hogy $CB_1 = BC_1 = s - a$, $AC_1 = CA_1 = s - b$, $AB_1 = BA_1 = s - c$.

Írjuk fel a koszinusztételt a B_1CP és C_1BP háromszögekben:

$$PB_1^2 = (s-a)^2 + CP^2 - 2(s-a)CP\cos\alpha'; \tag{3}$$

$$PC_1^2 = (s-a)^2 + BP^2 - 2(s-a)BP\cos\alpha'. \tag{4}$$

Mivel $PB_1 = PC_1$, a két jobb oldal egyenlő:

$$CP^2 - 2(s-a)CP\cos\alpha' = BP^2 - 2(s-a)BP\cos\alpha',$$

$$(CP - BP)(CP + BP) = CP^2 - BP^2 = 2(s-a)(CP - BP)\cos\alpha'. \tag{5}$$

A B_1AP és A_1BP háromszögekben felírt koszinusztételekből ugyanígy következik, hogy

$$(AP - BP)(AP + BP) = 2(s-c)(AP - BP)\cos\gamma'. \tag{6}$$

Az (5), (6) egyenletek $CP = BP$, illetve $AP = BP$ esetén is teljesülnek. Ha viszont mindkettő teljesülne, P az ABC kör középpontja lenne, ami ellentmondás: az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $CP \neq BP$. Ekkor (5) mindkét oldalát eloszthatjuk $(CP - BP)$-vel:

$$CP + BP = 2(s-a)\cos\alpha', \tag{7}$$

$$2R(\sin\gamma' + \sin\beta') = (b + c - a)\cos\alpha' = 2R(\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha)\cos\alpha',$$

$$\sin(\beta - \alpha') + \sin(\gamma + \alpha') = (\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha)\cos\alpha',$$

$$\sin\beta\cos\alpha' - \cos\beta\sin\alpha' + \sin\gamma\cos\alpha' + \cos\gamma\sin\alpha' =$$

$$= \sin\beta\cos\alpha' + \sin\gamma\cos\alpha' - \sin\alpha\cos\alpha',$$

$$\sin\alpha\cos\alpha' = \sin\alpha'(\cos\beta - \cos\gamma),$$

$$\operatorname{ctg}\alpha' = \frac{\cos\beta - \cos\gamma}{\sin\alpha}. \tag{8}$$

Most írjuk fel a koszinusztételt az A_1CP és AC_1P háromszögekben is:

$$PA_1^2 = (s-b)^2 + PC^2 - 2(s-b)PC\cos\beta'; \tag{9}$$

$$PC_1^2 = (s-b)^2 + PA^2 + 2(s-b)PA\cos\beta'. \tag{10}$$

$PA_1 = PC_1$ miatt a két jobb oldal egyenlő:

$$PC^2 - 2(s-b)PC\cos\beta' = PA^2 + 2(s-b)PA\cos\beta', \tag{11}$$

$$(PC - PA)(PC + PA) = PC^2 - PA^2 = 2(s-b)(PA + PC)\cos\beta',$$

$$PC - PA = 2(s-b)\cos\beta',$$

$$2R(\sin\gamma' - \sin\alpha') = (a + c - b)\cos\beta' = 2R(\sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta)\cos\beta',$$

$$\sin(\beta' + \alpha) - \sin(\beta' - \gamma) = (\sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta)\cos\beta',$$

$$\sin\beta'\cos\alpha + \cos\beta'\sin\alpha - \sin\beta'\cos\gamma + \cos\beta'\sin\gamma =$$

$$= \sin\alpha\cos\beta' + \sin\gamma\cos\beta' - \sin\beta\cos\beta',$$

$$\sin\beta'(\cos\gamma - \cos\alpha) = \sin\beta\cos\beta',$$

$$\operatorname{ctg}\beta' = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha}{\sin\beta}. \tag{12}$$

(2) miatt $\beta' - \alpha' = \gamma$: ha ez teljesül, ugyanez fennáll kotangenseikre is, azaz $\operatorname{ctg}(\beta' - \alpha') = \operatorname{ctg}\gamma$. Felhasználva a kotangens addíciós képletét (nullával osztás nem fordul elő, mivel $0 < \gamma < \pi$):

$$\begin{aligned}\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\operatorname{ctg}\alpha' \operatorname{ctg}\beta' + 1}{\operatorname{ctg}\alpha' - \operatorname{ctg}\beta'} &= \frac{\frac{\cos\beta-\cos\gamma}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\gamma-\cos\alpha}{\sin\beta}+1}{\frac{\cos\beta-\cos\gamma}{\sin\alpha}-\frac{\cos\gamma-\cos\alpha}{\sin\beta}} = \\ &= \frac{(\cos\beta-\cos\gamma)(\cos\gamma-\cos\alpha)+\sin\alpha\sin\beta}{(\cos\beta-\cos\gamma)\sin\beta-(\cos\gamma-\cos\alpha)\sin\alpha} = \\ &= \frac{-\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha-\cos^2\gamma+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta-\sin\alpha\cos\gamma-\sin\beta\cos\gamma} = \\ &= \frac{-\cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma)}{\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)-\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta)} = \\ &= \frac{\cos\gamma(1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta)} = \\ &= \frac{\cos\gamma(1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma)}{\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta)}.\end{aligned}$$

A bizonyítandóból tehát következik a következő egyenlet teljesülése:

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\cos\gamma(1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma)}{\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta)}. \tag{13}$$

(13) nyilván igaz akkor, ha $\cos\gamma = 0$, azaz γ derékszög. Tegyük fel most, hogy γ nem derékszög, azaz oszthatunk $\cos\gamma$-val: ezt elvégezve és felszorozva a nevezőkkel:

$$\begin{gathered}\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta) = \sin\gamma(1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma),\\ \sin\gamma\cos(\alpha-\beta) = \sin\gamma + (\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha)+\\ +(\sin\gamma\cos\beta+\cos\gamma\sin\beta)-\sin\gamma\cos\gamma =\\ = \sin\gamma+\sin(\gamma+\alpha)+\sin(\gamma+\beta)-\sin\gamma\cos\gamma =\\ = \sin\gamma+\sin\beta+\sin\alpha+\sin\gamma\cos(\alpha+\beta),\\ \sin\gamma\,(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)) = \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma,\\ \sin\gamma\cdot 2\sin\alpha\sin\beta = \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma.\end{gathered}$$

Az egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk R^2-tel és alkalmazzuk a szinusztételt:

$$t = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{R}{2}(a+b+c) = Rs;$$

másrészt viszont ismert módon $t = \varrho s$ és nyilván $R > \varrho$: ezek együtt ellentmondásra vezetnek, a háromszög tehát C-ben derékszögű. Ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés. Nem tettük fel, hogy $AP \neq BP$. Ha a háromszög C-ben derékszögű, valóban

$$\operatorname{ctg}\alpha' = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = 1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \operatorname{ctg}\beta',$$

tehát $\alpha' = \beta'$, így $AP = BP$. Az tehát, hogy a háromszögnek C-ben kell derékszögűnek lennie, az általánosság megszorításaiból (P elhelyezéséből és $CP \neq BP$ feltevéséből) következik.