Havasi Márton megoldása.[1] Az állítást k-ra vonatkoztatott indukcióval bizonyítjuk. A következőt fogjuk belátni: $k=1$-re, az $m_1 = n$ triviálisan megoldás.

Feltesszük, hogy az állítás igaz egy pozitív egész k-ra. Azt akarjuk belátni, hogy minden n egészhez léteznek $m_1, \ldots, m_{k+1}$ egészek, amelyek kielégítik az

$$1 + \frac{2^{k+1}-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right)$$

egyenletet. Két esetet különböztetünk meg n paritásától függően.

1. eset: n páratlan. Ekkor $\dfrac{n+1}{2}$ biztosan egész és a feltételből adódóan léteznek olyan $m_1, \ldots, m_k$ egészek, amelyekre teljesül

$$1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n+1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Legyen $m_{k+1} = n$. Ekkor:

$$\left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right) = \left(1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n+1}{2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{2^{k+1}-2}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1+2^{k+1}-2}{n} = 1 + \frac{2^{k+1}-1}{n}.$$

2. eset: n páros. Ekkor $\dfrac{n}{2}$ biztosan egész és a feltételből adódóan léteznek olyan $m_1, \ldots, m_k$ egészek, amelyekre teljesül

$$1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Legyen $m_{k+1} = 2^{k+1} + n - 2$. Ekkor:

$$\left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_{k+1}}\right) = \left(1 + \frac{2^k - 1}{\frac{n}{2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{k+1}+n-2}\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{2^{k+1}-2}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{k+1}+n-2}\right) = \frac{2^{k+1}+n-2}{n} \cdot \frac{2^{k+1}+n-2+1}{2^{k+1}+n-2} =$$
$$= 1 + \frac{2^{k+1}-1}{n}.$$

[1] Forrás: `imomath.com`.