Megoldás. Minden k pozitív egész számra

$$(k+0{,}4)^2 = k^2 + 0{,}8k + 0{,}16 \le k^2 + 0{,}96k < k^2 + k < k^2 + k + 0{,}25 = (k+0{,}5)^2,$$

vagyis $k + 0{,}4 < \sqrt{k(k+1)} < k + 0{,}5$. Ezért

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+0{,}4}{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(k+1)}}{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{k+0{,}5}{n}\,.$$

Alakítsuk át a két szélső összeget:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+0{,}4}{n} = \frac{\dfrac{(1+n)\cdot n}{2} + 0{,}4\cdot n}{n} = \frac{n}{2} + 0{,}5 + 0{,}4 = \frac{n}{2} + 0{,}9,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k+0{,}5}{n} = \frac{\dfrac{(1+n)\cdot n}{2} + 0{,}5\cdot n}{n} = \frac{n}{2} + 0{,}5 + 0{,}5 = \frac{n}{2} + 1.$$

Tehát

$$\frac{n}{2} + 0{,}9 < \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(k+1)}}{n} < \frac{n}{2} + 1.$$

Ha n páros, akkor $\frac{n}{2}$ egész, tehát az összeg $\frac{n}{2} + 0{,}9$ és $\frac{n}{2} + 1$ közé esik, és így a tizedesvessző utáni első számjegy a 9.

Ha n páratlan, akkor pedig $\frac{n}{2} - 0{,}5$ egész, és az összeg

$$\left(\frac{n}{2} - 0{,}5\right) + 0{,}5 + 0{,}9 = \left(\frac{n}{2} - 0{,}5\right) + 1{,}4 \quad \text{és}$$
$$\left(\frac{n}{2} - 0{,}5\right) + 0{,}5 + 1 = \left(\frac{n}{2} - 0{,}5\right) + 1{,}5$$

közé esik, tehát a kérdéses számjegy a 4.