

I. megoldás. Legyenek a háromszög oldalai $a \leq b < c$, ahol a Pitagorasztétel szerint $c^2 = a^2 + b^2$. Tudjuk, hogy $T = \frac{ab}{2}$ és $a, b \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$K = a + b + c, \quad \text{és} \quad \frac{ab}{2} = a + b + c.$$

Így $c = \frac{ab}{2} - (a + b)$. Ezt behelyettesítve a Pitagorasztételbe:

$$a^2 + b^2 = \left[\frac{ab}{2} - (a + b) \right]^2,$$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{ab}{2} \right)^2 - ab(a + b) + (a + b)^2,$$

$$0 = a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab,$$

$$0 = ab - 4a - 4b + 8,$$

$$8 = (a - 4)(b - 4).$$

$a - 4$	$b - 4$	a	b	c
1	8	5	12	13
2	4	6	8	10
4	2	8	6	10
8	1	12	5	13
-1	-8	3	-4	ezek nem lehetnek az oldalak (nincs 0 egységű, illetve negatív oldal)
-2	-4	2	0	
-4	-2	0	2	
-8	-1	-4	3	

A háromszög oldalai 5, 12, 13 vagy 6, 8, 10 egység hosszúak.

II. megoldás. Legyenek a háromszög oldalai $a \leq b < c$. Tudjuk, hogy $T = \frac{ab}{2}$, $K = a + b + c = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\frac{ab}{2} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b + \sqrt{(a + b)^2}$$

(mert $a, b > 0$ esetén $(a + b)^2 > a^2 + b^2$,)

$$\frac{ab}{2} \leq a + b + a + b \leq 4b.$$

Vagyis $\frac{ab}{2} \leq 4b$, azaz $a \leq 8$. Tehát a keresendő Pitagoraszi-számhármak legkisebb tagja nem lehet nagyobb 8-nál. Az összes ilyen számhármak:

a	b	c	$\frac{ab}{2}$	$a + b + c$
3	4	5	6	12
5	12	13	30	30
6	8	10	24	24
7	24	25	84	56
8	15	17	60	40

Ezek között két megfelelő számhármak van: 5, 12, 13 és 6, 8, 10.