Megoldás. A feladatnak nyilván csak $n \leq k$ esetén van értelme. Ha $n = k$, akkor bármely két szó legalább két helyen különbözik, tehát nincs él a gráfban; ekkor a gráf átmérője végtelen. Legyen a továbbiakban $n < k$.

Megmutatjuk, hogy a gráf átmérője (az érdektelen $n = 1$ esettől eltekintve) $\left[\frac{3n}{2}\right]$. Tekintsük először azt az esetet, amikor n páros. Vegyünk egy tetszőleges $A_1A_2A_3\dots A_n$ szót. Vizsgáljuk meg, hogy ez milyen távol van az $A_2A_1A_4A_3\dots A_nA_{n-1}$ szótól. Nézzük meg, hány élen kell végigmenni, hogy az A_1A_2 részből A_2A_1 legyen. Nevezzük lépésnek azt, amikor egy élen áthaladunk. Mivel különböző betűkből állnak a szavak, kell lennie egy olyan lépésnek, ahol A_1 vagy A_2 megváltozik egy A_1-től és A_2-től különböző betűre. Kell még két lépés, amikor az első helyre A_2, és amikor a másodikra A_1 kerül. Tehát legalább három lépésre van szükség. A különböző helyeken lévő változások egymást nem befolyásolják, ezért $\frac{n}{2}\cdot 3$ lépést kell (legalább) elvégezni ahhoz, hogy $A_1A_2A_3\dots A_n$-ből $A_2A_1A_4A_3\dots A_nA_{n-1}$-be érjünk.

Ha n páratlan, akkor az $A_1A_2A_3\dots A_n$ és az $A_2A_1A_4A_3\dots A_{n-1}A_{n-2}A_{n+1}$ szó távolsága (ahol $A_{n+1} \neq A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$) az előző esethez hasonlóan

$$3 \cdot \frac{n-1}{2} + 1 = \left[\frac{3n}{2}\right],$$

mivel az $\frac{n-1}{2}$ darab kételemű szakasz egyenként három lépésben változtatható meg, az egyelemű pedig nyilván egyetlen lépésben.

Eddig igazoltuk, hogy a gráfban léteznek egymástól $\left[\frac{3n}{2}\right]$ távolságra lévő pontok. Be kell még látnunk, hogy minden csúcs elérhető legfeljebb $\frac{n}{2}\cdot 3$ lépéssel a többi csúcs bármelyikéből. Tekintsünk ehhez két tetszőleges csúcsot, $A = A_1A_2A_3\dots A_n$-et és $B = B_1B_2B_3\dots B_n$-et. Ekkor A-ból B-be eljuthatunk a következő lépések ismételt alkalmazásával: Lépjünk egy olyan csúcsra, hogy egy A-beli betű a megfelelő helyen álló B-beli betűre változzon – nevezzük az ilyen lépést *termékenynek.* Csak akkor nem tudunk termékeny lépést tenni, ha olyan csúcson állunk, amely ugyanazokból a betűkből áll mint B, de más sorrendben; emiatt a B-től való távolsága még legalább 2. Ebben az esetben úgy lépjünk, hogy valamelyik – a B-ben elfoglalt helyétől eltérő helyen álló – A_i betű helyére egy olyan V betűt írunk, amely nem fordul elő B-ben. Az eddig megfelelőre változtatott betűket ezzel nem rontjuk el; nevezzük az ilyen típusú lépést *terméketlennek.* A következő lépésben A_i-t a (B-ben elfoglalt) helyére rakhatjuk. Mivel ekkor a (B-ben nem található) V benne marad a szóban, egy további betűt még biztosan a helyére tudunk rakni. Ezzel elérjük, hogy minden terméketlen lépést követni fog (legalább) két termékeny. Mivel a termékeny lépések száma n, a terméketleneké legfeljebb $\frac{n}{2}$ lehet, tehát összesen legfeljebb $n + \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$ lépés elegendő.

Damásdi Gábor megoldása