Megoldás. Vezessünk be új ismeretleneket: legyen $\sqrt{x+y}=a$, $\sqrt{y+z}=b$, $\sqrt{x+z}=c$. Ezzel egyenletrendszerünk a következő alakot ölti:

$$\frac{c+a}{b}+\frac{b+a}{c}=14-4c-4b, \tag{1}$$

$$a+b+c=4. \tag{2}$$

Az (1) egyenletben szereplő $c+a$, $b+a$, $-4c-4b$ helyébe a (2) egyenlet szerint rendre $4-b$, $4-c$, $-4(4-a)$ írható, ezért az (1) egyenlet rendezés után:

$$\frac{4-b}{b}+\frac{4-c}{c}=14-4(4-a),$$
$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a.$$

Ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe kapjuk, hogy

$$\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)=4.$$

Pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, és pontosan akkor 2, ha a szám 1. Mivel b és c pozitív, a kapott egyenlet szerint:

$$\left(b+\frac{1}{b}\right)=\left(c+\frac{1}{c}\right)=2,$$

így $b=c=1$, amiből $a=4-b-c=2$. Az eredeti ismeretlenekre ebből négyzetre emeléssel az

$$x+y=4, \qquad y+z=1, \qquad x+z=1$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, aminek egyértelmű megoldása:

$$x=2, \qquad y=2, \qquad z=-1.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a számhármas kielégíti a feladat egyenleteit.