Éles András megoldása. Legyen $m \geq 2$, és $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq s$ tetszőleges m darab pozitív egész, melyek összege n. Ha ezek teljesítenek egy *plusz feltételt,* akkor az

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_m}$$

összeget *n-re képzett összegnek* nevezzük. A plusz feltétel az, hogy az i_j számok közül valamelyik kettő összege nagyobb, mint s (például $i_1 + i_2 > s$, viszont $i_1 + i_1 > s$ még nem elégséges feltétel). Ezt a definíciót és a plusz feltétel eredetét a most következő kulcsfontosságú lemma és annak bizonyítása fogja megmagyarázni.

Lemma. *Az n-re képzett összegek maximuma a_n minden $n > s$ esetén.*

Ezt n-re indukcióval igazoljuk. Ha $k > s$, akkor $n > k$ és az indukciós feltevés értelmében a_k helyébe beírhatunk egy k-ra képzett összeget. Ugyanígy járunk el a_{n-k}-val. Az indexek összege n lesz, a plusz feltétel pedig teljesül, hiszen a_k vagy a_{n-k} felírásából származik két megfelelő indexű tag, ha $k > s$ vagy $n - k > s$ (különben pedig ők maguk a két tag). Tehát a_n felírható egy n-re képzett összegként.

Már csak azt kell igazolni, hogy a_n fölső becslés minden n-re képzett összegre. Feltehető a plusz feltétel miatt, hogy $i_1 + i_2 > s$. Alkalmazva a sorozat képzési szabályát mindig a legelső tagra (amelynek indexe mindenütt nagyobb, mint s):

$$\begin{aligned} a_n &= a_{i_1+i_2+\cdots+i_k} \geq a_{i_1+i_2+\cdots+i_{k-1}} + a_k \geq a_{i_1+\cdots+i_{k-2}} + a_{k-1} + a_k \geq \cdots \geq \\ &\geq a_{i_1+i_2} + a_{i_3} + \cdots + a_k \geq a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}. \end{aligned}$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

Legyen l olyan pozitív egész, melyre $1 \leq l \leq s$ és ezen belül $\dfrac{a_l}{l}$ maximális! A megoldás azon észrevételen alapszik, hogy elég nagy n-re felírva a_n-et egy n-re képzett összegként, az a_l-től különböző tagok száma egy bizonyos határ alá szorítható. Ha ugyanis $t \neq l$ és van $l+2$ darab a_t az összegben, akkor l darab a_t lecserélhető t darab a_l-re, az összeg ekkor nem csökken, hiszen

$$l \cdot a_t = lt \cdot \frac{a_t}{t} \leq lt \cdot \frac{a_l}{l} = t \cdot a_l.$$

Így egy legalább akkora, tehát ismét a_n-nel egyenlő n-re képzett összeget kaptunk. (azért a $+2$ darab a_t, hogy az eltűnő indexből maradjon legalább kettő, így ne sérüljön a *plusz feltétel*). Ezt az eljárást addig végezzük, míg lehet, ily módon a_n már olyan n-re képzett összegként áll majd elő, ahol minden t, $1 \leq t \leq s$, $t \neq l$ esetén a_t az összegben legfeljebb $(l+1)$-szer szerepel.

Következő választásunk

$$N = (1 + 2 + \ldots + s)(l+1) + 2l + 1,$$

ugyanis $n \geq N$ esetén a_n fenti felírásában legalább 3 darab a_l lesz jelen, hiszen a többi index összege maximum $N - 2l - 1$. Az egyik a_l-t törölve marad legalább kettő (így a plusz feltétel megint nem sérül), az indexek összege $n - l$ lesz, tehát egy $(n-l)$-re képzett összeg, S_{n-l} marad hátra. De akkor, a lemma és a sorozat képzése alapján

$$a_n = a_l + S_{n-l} \leq a_l + a_{n-l} \leq a_n.$$

Ez végig egyenlőség. Tehát l-nek és N-nek a fenti választásaival $a_n = a_l + a_{n-l}$ minden $n \geq N$ esetén. (A gondolatmenet finomításával N javítható.)