

Dankovics Attila megoldása. Vezessük be a következő jelöléseket.

Kapcsos zárójelbe tett rendezett számhatosok jelölik az állásokat: $\{1; 1; 1; 1; 1\}$ az alapállás (az első pár üreset elhagyva: $\{0; 0; 0; 1; 1; 1\} = \{1; 1; 1\}$).

Zárójelbe tett rendezett számpárok jelölik a lépéseket: például $(1; 2)$ azt jelenti, hogy az első dobozból egy 2. típusú lépést hajtottunk végre. Végül jelölje például $n \cdot (k; 1)$ azt, hogy a $(k; 1)$ lépést n -szer végezzük el.

Legyen $v = 2010^{2010^{2010}}$.

1. Lemma. Az $\{a; b; c; x; 0; 0\}$ állásból elérhető az $\{a; b; c; 0; 2^x; 0\}$ állás.

Bizonyítás. Teljes indukció x szerint: $x = 1$ -re $(4; 1)$ lépés után elértük az állást.

Indukciós lépés: $\{a; b; c; 0; 2^{x-1}; 0\}$ az indukciós feltevés szerint elérhető. Ez után 2^{x-1} -szer az $(5; 1)$, majd a $(4; 2)$ lépéseket végrehajtva elértük a kívánt állást.

Hajtsuk végre egymás után a következő lépéseket:

$\{1; 1; 1; 1; 1; 1\}$ -re $(1; 1); (2; 1); (3; 1); (4; 1); (5; 1)$, az így kapott

$\{0; 2; 2; 2; 2; 3\}$ -re $2 \cdot (5; 1); (4; 2); 7 \cdot (5; 1); (3; 2)$, majd

$\{0; 2; 1; 14; 0; 0\}$ -re az 1. Lemma szerint létező lépéssorozattal kapott

$\{0; 2; 1; 0; 2^{14}; 0\}$ -re $(3; 2); (2; 2); (2; 1); 2 \cdot (3; 1)$ adja

$\{0; 0; 2^{14}; 4; 0; 0\}$ -t, amire az 1. Lemma eljárását és $(3; 2)$ -t felváltva ismételve 2^{14} -szer a $\left\{0; 0; 0; \underbrace{2^{2^2 \dots 2^2}}_{2^{14+2} \text{ db}}; 0; 0\right\}$

álláshoz jutunk.

Legyen a B_4 dobozban lévő érmék aktuális száma mindig h . Megjegyzendő, hogy h paritása tetszőlegesen beállítható (szükség esetén a $(4; 2)$ lépés alkalmazásával); ezt később fogom kihasználni.

Az előbbi helyzetből a $3 \cdot ((4; 1); 2 \cdot (5; 1))$ átalakítás után a $\{h; 0; 12\}$ állást kapjuk. Jelölje a B_6 -ban lévő érmék számát mindig y (mely jelenleg 3-mal osztható, lévén 12). Legyen végül a B_5 -ben lévő érmék száma x .

Ekkor a $(4; 2); x \cdot (5; 1)$ lépéssorozat y értékét duplázza és h értékét 1-gyel csökkenti (ezután h még pozitív marad, mert $h > v$; továbbá y 3-mal osztható marad; továbbá h paritása tetszőleges marad). Duplázzuk y -t míg $2y \leq v < 4y$ teljesül. Legyen az ekkor aktuális y értéke c . A $(4; 2)$ lépés után ismétljük az $(5; 1)$ lépést addig, amíg $x + 2y = v$ nem teljesül (előbb-utóbb teljesülni fog, mert $x + 2y$ minden lépésben 3-mal nő, így c és $4c$ között minden 3-mal osztható értéket felvesz, és v is ilyen). Ezt követően a $(4; 2); x \cdot (5; 1)$ lépéssorozat után a $\{h; 0; v\}$ állást kapjuk. Ez az állás tetszőleges paritású h -val elérhető, legyen h páros. Ekkor $h \cdot (4; 2)$ után az állás: $\{0; 0; 0; 0; 0; v\}$, ami megegyezik az elérendő állással.

Tehát a kérdéses állás elérhető.