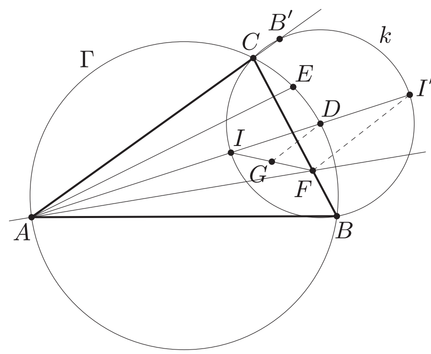
Nagy Donát megoldása. Legyen I tükörképe D-re I', ekkor $ID = DI'$, és így $GD \parallel FI'$, hiszen GD középvonal az IFI' háromszögben. Mivel AD szögfelező az ABC háromszögben, a kerületi szögek tételéből $BD{=}DC$. Felhasználva, hogy BI és CI szögfelező az ABC háromszögben

$$BIC\sphericalangle = 180^\circ - ICB\sphericalangle - IBC\sphericalangle = 180^\circ - \frac{ACB\sphericalangle}{2} - \frac{ABC\sphericalangle}{2}, \quad \text{továbbá}$$

$$BDC\sphericalangle = 180^\circ - BAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle + ACB\sphericalangle,$$

hiszen $ABCD$ húrnégyszög. A D középpontú $DB = DC$ sugarú körön I rajta van, hiszen $BIC\sphericalangle = 180^\circ - \dfrac{BDC\sphericalangle}{2}$, és BC elválasztja D-t és I-t. Az II' nyilván ennek a k körnek az átmérője.



Legyen $FAI\sphericalangle = IAE\sphericalangle = \varphi$ (a két szög a feladat feltétele és $IAB\sphericalangle = IAC\sphericalangle$ miatt egyenlő). A kerületi szögek tétele szerint GD és EI metszéspontja pontosan akkor van Γ-n, ha

$$(\overrightarrow{GD}, \overrightarrow{IE})\sphericalangle = \varphi = (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})\sphericalangle = (\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})\sphericalangle$$

(itt a megfelelő vektorok által bezárt irányított szögek egyenlőségét tekintem). Mivel $\overrightarrow{GD}$ és $\overrightarrow{FI'}$ egyirányúak, ez ekvivalens azzal, hogy

$$(\overrightarrow{AI'}, \overrightarrow{AE})\sphericalangle = \varphi = (\overrightarrow{FI'}, \overrightarrow{IE})\sphericalangle.$$

Tekintsük azt az A középpontú φ szögű nyújtva forgatást, ami F-et I-be viszi. Ez egy φ szöggel való nyújtva forgatás, I' képe az AE egyenesre, AI' képére esik, és a bizonyítandó ekvivalens azzal, hogy FI' képe IE, tehát hogy I' képe E. Az I' képe pontosan akkor E, ha $AF : AI = AI' : AE$, azaz $AE \cdot AF = AI \cdot AI'$.

Mivel $BAF\sphericalangle = EAC\sphericalangle$ és a kerületi szögek tételéből:

$$CEA\sphericalangle = CBA\sphericalangle, \quad ABF \sim AEC, \quad AB : AF = AE : AC, \quad AE \cdot AF = AB \cdot AC.$$

Így az állítás pontosan akkor teljesül, ha $AB \cdot AC = AI \cdot AI'$. Legyen B' a B pont tükörképe AD-re; ekkor $BAD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$ miatt B' az AC egyenesen van, $BD = B'D$ miatt B' a k körön van, és $B' = C$ (akkor és) csak akkor teljesül, ha $AB = AC$, de ekkor a kerületi szögek tételéből:

$$ACD\sphericalangle = ACB\sphericalangle + DAB\sphericalangle = ACB\sphericalangle + \frac{180^\circ - 2ACB\sphericalangle}{2} = 90^\circ,$$

így a k kör $B' = C$-ben érinti az AC egyenest. Ezekből következik, hogy A-nak a k-ra vonatkozó hatványa $AI \cdot AI' = AC \cdot AB' = AC \cdot AB$, és ezzel készen vagyunk.