Megoldás. A hagyományos és a trigonometrikus háromszög területképlet és a szinusztétel felhasználásával:

$$\frac{m_a}{a} = \frac{2T}{a^2} = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{a^2} = \frac{b \cdot \sin\gamma}{a} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Hasonlóan:

$$\frac{m_b}{b} = \frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \text{és} \quad \frac{m_c}{c} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Az addíciós képleteket felírva:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta, \quad \sin 2\gamma = 2 \cdot \sin\gamma\cos\gamma.$$

Ezeket behelyettesítve az egyenlőtlenségbe és a műveleteket elvégezve az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\sin\gamma\sin\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} \geq \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha} + \frac{\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\gamma} + \sqrt{3}\,.$$

A bal és a jobb oldal első tagjának különbségét átalakítva:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} - \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha} &= \frac{\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha} = \frac{-\cos(\beta+\gamma)}{\sin\alpha} = \\ &= \frac{\cos\left(\pi - (\beta+\gamma)\right)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}$$

Ezt hasonlóan elvégezve a második és harmadik taggal, majd a kapott eredményt beírva az egyenlőtlenségbe: $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geq \sqrt{3}\,$. A kotangens függvény a $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumon szigorúan konvex. Ezért felírhatjuk rá a Jensen-egyenlőtlenséget:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}{3} \geq \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

amiből $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geq \sqrt{3}\,$. Az egyenlőség a Jensen-egyenlőtlenségben akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

Ezzel az állítást igazoltuk.