Megoldás. Használjuk az

$$S_k = x^k - y^k$$

jelölést minden k pozitív egészre; legyen továbbá $x + y = a$ és $xy = b$. Az ismert azonosság szerint

$$\sum_{k=0}^{20} x^{20-k} y^k = \frac{S_{21}}{x-y} = \frac{S_{21}}{S_1}.$$

Ha $n > 1$, akkor

$$S_{n+1} = x^{n+1} - y^{n+1} = (x^n - y^n)(x+y) - (x^n y - xy^n) = aS_n - bS_{n-1}.$$

Ezt alkalmazva $n = 1, 2, \ldots, 6$-ra:

$$\begin{aligned}
&S_1 = x - y,\\
&S_2 = a(x-y) = aS_1,\\
&S_3 = a^2(x-y) - b(x-y) = \left(a^2 - b\right) S_1,\\
&S_4 = a\left(a^2 - b\right) S_1 - baS_1 = \left(a^3 - 2ab\right) S_1,\\
&S_5 = a\left(a^3 - 2ab\right) S_1 - b\left(a^2 - b\right) S_1 = \left(a^4 - 3a^2b + b^2\right) S_1,\\
&S_6 = a\left(a^4 - 3a^2b + b^2\right) S_1 - b\left(a^3 - 2ab\right) S_1 = \left(a^5 - 4a^3b + 3ab^2\right) S_1,\\
&S_7 = a\left(a^5 - 4a^3b + 3ab^2\right) S_1 - b\left(a^4 - 3a^2b + b^2\right) S_1 = \left(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3\right) S_1.
\end{aligned}$$

Végül

$$S_{21} = x^{21} - y^{21} = \left(x^7\right)^3 - \left(y^7\right)^3 = \left(x^7 - y^7\right)\left(\left(x^7\right)^2 + x^7y^7 + \left(y^7\right)^2\right) = S_7\left(S_7^2 + 3b^7\right)$$

alapján

$$\begin{aligned}
\frac{S_{21}}{x-y} &= \left(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3\right)^3 S_1^2 + 3b^7\left(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3\right) =\\
&= \left(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3\right)^3\left(a^2 - 4b\right) + 3b^7\left(a^6 - 5a^4b + 6a^2b^2 - b^3\right).
\end{aligned}$$

Így a keresett polinom

$$\begin{aligned}
p(z,t) &= \left(z^6 - 5z^4t + 6z^2t^2 - t^3\right)^3\left(z^2 - 4t\right) + 3t^7\left(z^6 - 5z^4t + 6z^2t^2 - t^3\right) =\\
&= z^{20} - 19z^{18}t + 153z^{16}t^2 - 680z^{14}t^3 + 1820z^{12}t^4 - 3003z^{10}t^5 + 3003z^8t^6 -\\
&\quad - 1716z^6t^7 + 495z^4t^8 - 55z^2t^9 + t^{10}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Általában, a

$$p_n(x+y, xy) = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k$$

követelményt kielégítő $p_n = p_n(z,t)$ polinomokra a megoldásban alkalmazott $S_{n+1} = aS_n - bS_{n-1}$ rekurzió megfelelőjeként teljesülő

$$p_{n+1}(z,t) = zp_n(z,t) - tp_{n-1}(z,t)$$

rekurzió segítségével, az n-re vonatkozó indukcióval belátható, hogy

$$p_n(z,t) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \binom{n-i}{i} z^{n-2i} t^i.$$