Megoldás. *A mérés eszközei:* 4 db 1,5 literes üdítőspalack, csavarok, fogó, gázláng, vonalzó, tolómérő, alkoholos filctoll, stopperóra.

A mérés előkészítése. A méréshez 4 egyforma 1,5 literes üdítős palackot használtam (átmérője $D = 85 \pm 2$ mm, magassága kb. 25 cm). A palackok alján gázlánggal felizzított csavarokkal olvasztottam lyukakat, ezek a csavar hőmérsékletének köszönhetően közel szabályos kör alakúak lettek: az egyes lyukak átmérői rendre $d = 2{,}5 \pm 0{,}1$ mm, $3{,}4 \pm 0{,}1$ mm, $4{,}6 \pm 0{,}1$ mm és $5{,}5 \pm 0{,}1$ mm. A lyukak körül csak kevés sorja jelent meg, ezeket is megpróbáltam eltávolítani.

A palackokat a lyukak elkészítése után néhány cm magasságban megtöltöttem vízzel, majd hagytam kiürülni a lyukon keresztül: ez meghatározza a lyuk magasságát, ahová H nullaszintjét kell igazítani. Itt alkoholos filccel megjelöltem a palackot, majd efölött cm-enként beosztottam a palack alsó részét, egészen addig, amíg a palack nyaka nem kezdett el szűkülni: az utolsó jelzés 18 cm-es magasságba került. A beosztások hibája kevesebb, mint 1 mm, ezt más hibaforrások mellett elhanyagolhatjuk.

A mérés menete. A palackot feltöltöttem teljes magasságban vízzel, majd a mosogató szélére állítottam, és hagytam a vizet kifolyni. Amikor a vízszint elérte az első ($H_0 = 18$ cm-es) jelet, elindítottam a stopperórát, majd minden osztás elérésekor részidőt mértem. Minden palackkal ötször mértem, az adatok átlagával számoltam.

A H magasságig megtöltött palack kiürüléséhez szükséges $T(H)$ időnek és a legfelső jelig feltöltött palack H magasságig történő $t(H)$ kiürülési idejének összege együtt a teljesen feltöltött palack kiürülésének idejét ($T(H_0) = t(0)$) adja: $T(H) = t(0) - t(H)$. A mérés során a leírásból láthatóan $t(H)$ értékeit mérjük $0 \le H < H_0$ értékeire, ebből számítjuk $T(H)$-t. A vízszint egyes jelekhez való megérkezésére elég jól fel lehetett készülni, viszont a felületi feszültség miatt a palack szélén felkúszó vízszint megnehezítette a leolvasást. Mindezek alapján az időmérések hibáját kb. 0,2 – 0,3 s-nak vehetünk, ez T legkisebb értékeitől eltekintve elhanyagolható.

A mért adatok $d = 2{,}5$ mm *lyukméretnél:*

H [cm]	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]	$\bar{t}$ [s]	T [s]
18	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	328,4
17	10,5	10,4	10,3	10,8	10,5	10,5	317,9
16	21,3	21,5	21,2	21,6	21,4	21,4	307,0
15	32,6	32,5	32,5	32,4	32,5	32,5	295,9
14	43,7	43,6	43,7	43,7	44,2	43,8	284,6
13	55,8	55,3	55,6	55,5	55,4	55,5	272,9
12	67,5	67,5	67,5	67,5	67,9	67,6	260,8
11	80,5	80,4	80,3	80,1	80,3	80,3	248,1
10	93,3	93,3	93,4	93,5	93,4	93,4	235,0
9	107,5	107,1	107,2	107,4	107,0	107,2	221,1
8	121,5	121,8	121,4	121,7	121,4	121,6	206,8
7	136,7	136,4	136,6	136,9	136,7	136,7	191,7
6	152,9	153,1	152,8	152,8	152,9	152,9	175,5
5	170,2	170,1	170,3	170,1	170,3	170,2	158,2
4	189,1	189,3	189,3	189,1	189,1	189,2	139,2
3	209,7	209,9	210,2	210,1	209,9	210,0	118,4
2	234,4	234,3	234,4	234,7	234,4	234,4	93,9
1	265,2	264,9	265,1	264,8	265,4	265,1	63,3
0	328,2	328,3	328,4	328,5	328,5	328,4	0,0

Hasonló táblázatot készítettem a többi lyukátmérőhöz tartozó mérési adatokból is. (Ezeket terjedelmi okokból nem közöljük. *A szerk.*)

A mért adatok feldolgozása. A mérés során a $H_0 = 18$ cm magasságig feltöltött üvegből H magasságig való kiürülés időtartamát, $t(H)$-t mérjük közvetlenül. A palack teljes kiürülési ideje $t(0)$, így a H magasságból való kiürülés időtartama $T(H) = t(0) - t(H)$ módon számolható. T kiszámítása előtt a t-re kapott adatokat átlagoltam, azokkal számoltam tovább. (Nyilvánvalóan ugyanezt az eredményt kapnánk akkor is, ha a két műveletet fordított sorrendben végezzük el.)

A Torricelli-törvény szerint a kifolyási sebesség nem függ a lyuk méretétől, csak a folyadékoszlop magasságától. Ebből az következik, hogy az egységnyi idő alatt kifolyó víz térfogata arányos a lyuk keresztmetszetével (az átmérő négyzetével), emiatt a kifolyási idő a keresztmetszettel fordítottan arányos. Az elméletből következő összefüggést a mérési adatok segítségével megerősíthetjük. A következő táblázat Td^2 értékét tartalmazza ($\mathrm{s} \cdot \mathrm{mm}^2$ egységben) 5, 10 és 15 cm-es vízoszlopokra:

h [cm]	2,5 mm	3,4 mm	4,6 mm	5,5 mm
5	989	948	1060	1016
10	1470	1390	1540	1480
15	1850	1740	1930	1850

Az átmérő relatív hibája nagyságrendileg $\frac{1}{40} = 2{,}5\%$, ezért a táblázat adatainak relatív hibája ennek kétszerese, kb. 5%. Ezen a hibahatáron belül a táblázat soraiban szereplő adatok azonosak, ebből az elméleti megfontolás helyességére következtethetünk. Érdekes megfigyelni, hogy a 3,4 mm-es lyukhoz mindig kisebb, a 4,6 mm-es lyukhoz nagyobb adat tartozik, mint az átlag: ezt lehet, hogy a d mérésénél elkövetett nagyobb hiba okozza.

A közölt információ szerint a palack kiürüléséhez szükséges idő felírható $T = AH^{\alpha}$ alakban, és a feladat α meghatározása. Az összefüggés igazolására a mért adatokat a *gnuplot* program segítségével ábrázoltam, majd a megadott alakú görbét illesztettem rájuk. (Számítógép nélkül ez úgy oldható meg, hogy $\ln T$-t ábrázoljuk $\ln H$ függvényében, majd a grafikonra egyenest illesztünk. Az α kitevő az egyenes meredekségéből olvasható le.)

Az adatokra valóban nagy pontossággal illeszthetők voltak ilyen alakú görbék, és az állandók és azok hibájának kiszámított értékei:

d [mm]	α	A [s m$^{-\alpha}$]
2,5	$0{,}5700 \pm 0{,}0002$	$872{,}7 \pm 0{,}4$
3,4	$0{,}5541 \pm 0{,}0003$	$430{,}7 \pm 0{,}3$
4,6	$0{,}5446 \pm 0{,}0005$	$256{,}0 \pm 0{,}3$
5,5	$0{,}539 \pm 0{,}001$	$169{,}3 \pm 0{,}4$

A hatványkitevő értéke tehát 0,5 és 0,6 között mozog, kisebb lyukakra nagyobb az értéke. A kitevő elméleti értéke (az alább ismertetendő megfontolások szerint) 0,5; ennél a mért adatok határozottan nagyobbak. Ennek legvalószínűbb oka, amely a tendenciát is magyarázhatja, a lyukban áramló vízben fellépő belső súrlódás miatti energiaveszteség.

Kiegészítés: elméleti megfontolások. A Torricelli-törvény kiegészített alakja figyelembe veszi, hogy a lyuk körül kialakuló örvények felemésztik a mozgási energia egy részét: eszerint a kiömlési sebesség $v = k\sqrt{2gh}$ alakban adható meg, ahol k a lyuk kialakítására jellemző állandó. Felhasználva a víz térfogatának csökkenése és a kiáramlási sebesség közötti

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{D^2\pi}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2\pi}{4}v$$

összefüggést, valamint a Torricelli-törvény fenti alakját, a magasság csökkenése és az időtartamok közötti kapcsolatra a következő differenciálegyenlet adódik:

$$-\frac{D^2}{kd^2\sqrt{2g}}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = \mathrm{d}t,$$

aminek megoldásából

$$T = \frac{D^2}{kd^2}\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{H}$$

következik; a hatványkitevő elméleti értéke tehát 0,5. Mivel a mért értékek ehhez közel állnak, ezért megpróbálhatunk az adatokra ilyen, $T = B\sqrt{H}$ alakú görbét illeszteni. A B-re elméletileg kapott kifejezés alapján meghatározható k értéke is. Az alábbi táblázat ezeket a (mérési adatok alapján) számított értékeket tartalmazza:

d [mm]	B [s m$^{-(1/2)}$]	k
2,5	$749{,}4 \pm 5,9$	$0{,}697 \pm 0{,}094$
3,4	$382{,}8 \pm 5,9$	$0{,}737 \pm 0{,}082$
4,6	$232{,}2 \pm 1,2$	$0{,}664 \pm 0{,}064$
5,5	$155{,}5 \pm 0,7$	$0{,}694 \pm 0{,}061$

A (viszonylag magas) hibahatáron belül k értékei azonosak, ez a lyukak hasonló kialakítására utal; a k értékeiben megfigyelhető különbségek illeszkednek a Td^2-nél megfigyelt szisztematikus eltérésekhez. k átlagértéke $0{,}70 \pm 0{,}038$, ezt a vastag palacktalpba lyukasztott sima körlyukra jellemzőnek tekinthetjük.