Megoldás. Legyenek ennek a pontnak a háromszög BC, AC, AB oldalaitól mért távolságai rendre x, y, z, a háromszög oldalai pedig a, b, c. A BPC, CPA, APB háromszögek területének összege adja az egész háromszög területét, így:

$$ax + by + cz = 2T,$$

ahol T a teljes háromszög területe. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget felírva ax-re, by-ra és cz-re:

$$\frac{2T}{3} = \frac{ax + by + cz}{3} \geq \sqrt[3]{ax \cdot by \cdot cz} = \sqrt[3]{abc \cdot xyz},$$

$$\left(\frac{2T}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq xyz.$$

A bal oldal konstans, hiszen T, a, b, c mind állandók egy adott háromszög esetén, a jobb oldalon pedig a vizsgált szorzat áll. Így az akkor lesz a legnagyobb, ha a számtani-mértani középnél egyenlőség áll fenn. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{ax}{2} = \frac{by}{2} = \frac{cz}{2} = \frac{T}{3},$$

vagyis a kis háromszögek területei megegyeznek, és ez a nagy háromszög területének harmada.

Először belátjuk, hogy csak egy olyan pont létezhet a háromszög belsejében, amelyre ez igaz. Ugyanis például $\frac{ax}{2} = \frac{T}{3}$ miatt a pontnak rajta kell lennie az a-val párhuzamos, attól $\frac{m_a}{3}$ távolságra haladó egyenesen, és hasonlóan igaz ez a többi oldalra is. Viszont mivel az eredeti oldalak közül semelyik kettő nem párhuzamos, így a velük párhuzamos egyenesek közt se lesz két párhuzamos, tehát legfeljebb egy metszéspontjuk lehet. A háromszög súlyvonalairól tudjuk, hogy a háromszög területét hat egyenlő részre osztják, illetve a súlypontot a csúcsokkal összekötve három egyenlő területű háromszöget kapunk.

Tehát a súlypontra lesz maximális az oldalaktól mért távolságok szorzata.

Megjegyzés. Ugyanezt a feladatot a fizika rovatban is kitűztük (**P. 4648.** feladat), megoldása ebben a számban az 52. oldalon található.