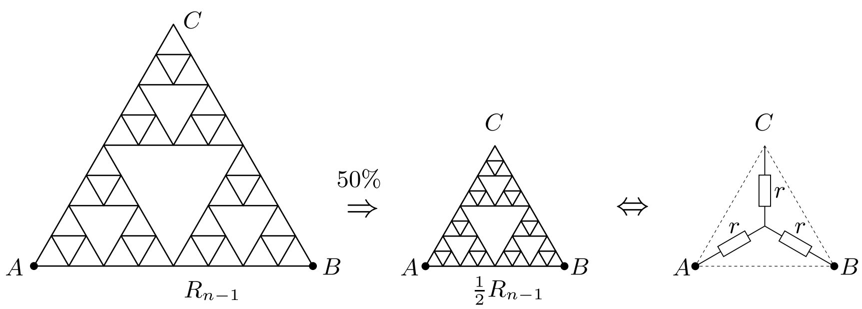
I. megoldás. Jelöljük az n-edik lépés után kapott áramkör A és B pontok közötti ellenállását R_n-nel! (A kiindulás helyzetben, vagyis a szabályos háromszögnél ez az ellenállás a megadott R_0.)

Az n-edik lépésben kapott hálózat tartalmazza az előző lépésnek megfelelő háromszöget három példányban, de a korábbi méretük helyett felére lecsökkentett méretben. Egy-egy ilyen – lecsökkentett hosszméretű – dróthálózat eredő ellenállása bármelyik két csúcspontja között $\frac{1}{2}R_{n-1}$. (Az Ohm-törvény szerint a kapcsolás minden elemének, így azok eredőjének ellenállása is a hosszmérettel arányos, ha a vezeték keresztmetszete mindenhol ugyanakkora.)

Keressünk kapcsolatot R_n és R_{n-1} között, majd ennek ismeretében fejezzük ki R_n-t R_0-lal. Minden 3-pólusú (3 kivezetéssel ellátott) ellenálláshálózat helyettesíthető három, alkalmasan választott nagyságú ellenállás „csillagkapcsolásával”. Mivel esetünkben a háromszög csúcsai teljesen szimmetrikus szerepet játszanak, a helyettesítő kapcsolás három ellenállása egyforma r nagyságú. Az $(n-1)$-edik lépés utáni kialakult kapcsolás felére kicsinyített másánál például

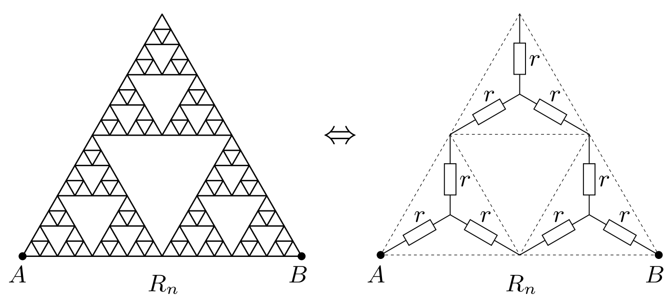
$$r=\frac{1}{4}R_{n-1},$$

hiszen ekkor lesz a tényleges és a helyettesítő csillagkapcsolásban az A és B pontok közötti ellenállás ugyanakkora (*1. ábra*).



1. ábra

Rakjuk össze az n-edik lépés utáni kapcsolást a megelőző lépésben szereplő áramkör három, felére kicsinyített példányából, pontosabban az azokat helyettesítő csillagkapcsolásokból (*2. ábra*).



2. ábra

Az ábrán 4, illetve 2 darab sorosan kapcsolt r ellenállást látunk, amelyek párhuzamos eredője:

$$\left(\frac{1}{4r}+\frac{1}{2r}\right)^{-1}=\frac{4}{3}r.$$

Ezeknek és a hozzájuk sorosan kapcsolódó 2 darab r nagyságú ellenállásnak az eredője megadja R_n-t:

$$R_n=2r+\frac{4}{3}r=\frac{10}{3}r=\frac{5}{6}R_{n-1}.$$

Ezek szerint

$$R_1=\frac{5}{6}R_0,\qquad R_2=\frac{5}{6}R_1=\left(\frac{5}{6}\right)^2R_0,\qquad \dots\qquad R_n=\left(\frac{5}{6}\right)^nR_0.$$

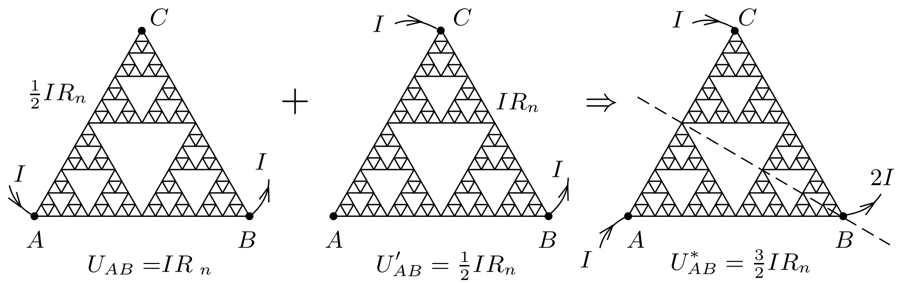
II. megoldás. Jelöljük a kiindulási helyzetben szereplő szabályos háromszög egy-egy oldalának ellenállását r_0-lal, az n-edik lépés után keletkező áramkör A és B pontok közötti eredő ellenállását pedig R_n-nel! (Könnyen kiszámítható, hogy $r_0=\frac{3}{2}R_0$, de ezt a későbbiekben nem fogjuk felhasználni.)

Tekintsük az n-edik lépés utáni helyzetet! Vezessünk be az A pontnál I erősségű áramot, és ugyanennyit vezessünk el a B pontból. Ekkor $U_{AB}=IR_n$ lesz, továbbá (a szimmetria miatt) $U_{AC}=U_{BC}=\frac{1}{2}IR_n$.

Ha felcseréljük a szerepeket és a C pontban vezetjük be az I áramot, de továbbra is a B pontból vezetjük el azt, akkor a megfelelő feszültségek:

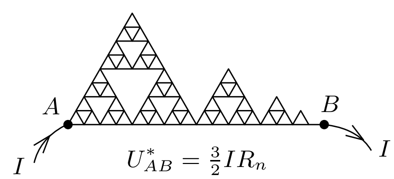
$$U'_{AB} = U'_{AC} = \frac{1}{2}U'_{BC} = \frac{1}{2}IR_n.$$

Képezzük most a fenti két kapcsolás áram- és feszültségeloszlásának „szuperpozícióját” (*3. ábra*)! Az eredmény: a háromszög A és C pontjába bevezetett, egyenként I erősségű áram a B pontnál távozik, miközben az A és B pontok között összesen $U^*_{AB} = \dfrac{3}{2}IR_n$ feszültség esik.



3. ábra

A szuperponált árameloszlás szimmetrikus a szaggatott vonallal jelölt magasságvonalra, e vonal mentén tehát kettévágható (hiszen a vágási helyeken lévő pontok páronként ekvipotenciálisak, tehát mindegy, hogy van-e közöttük kapcsolat, vagy nincs). Ilymódon a *4. ábrán* látható elrendezéshez jutunk. A kapcsolás teljes ellenállása egyrészt $\dfrac{U^*_{AB}}{I} = \dfrac{3}{2}R_n$, másrészt egy sorbakapcsolt ellenállásrendszer eredője.



4. ábra

A rendszer első tagja az R_{n-1} fele, hiszen az eggyel korábbi lépés eredményének felére kicsinyített változata, a második tag R_{n-2} negyede és így tovább. A kapcsolás jobb szélén egy $r_0/2^n$ ellenállású, egyenes vezetékdarab található. Így felírhatjuk, hogy

$$R_n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}R_{n-1} + \frac{1}{4}R_{n-2} + \frac{1}{8}R_{n-3} + \ldots + \frac{1}{2^n}R_0 + \frac{1}{2^n}r_0\right).$$

Az összeg első tagját leválasztva a maradékról felismerhetjük, hogy az éppen $\dfrac{1}{2}R_{n-1}$, így fennáll

$$R_n = \frac{1}{3}R_{n-1} + \frac{1}{2}R_{n-1}, \quad \text{amiből} R_n = \frac{5}{6}R_{n-1}, \quad \text{vagyis} \quad R_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n R_0$$

következik.

Megjegyzések. 1. Az eljárás nagyon sokszor történő ismétlésének nyilván fizikai határt szab a vezeték véges vastagsága, de mivel a kezdeti méret – elvben – tetszőlegesen nagynak választható, n bármilyen nagy szám lehet. Érdekes, hogy ha $n \to \infty$, akkor $R_n \to 0$, jóllehet ebben a határesetben a felhasználandó huzal teljes hossza (és így a huzal szétdaradolás előtti ellenállása is) tetszőlegesen naggyá válik, matematikai értelemben végtelenhez tart. A látszólagos ellentmondás feloldása: az egymás melletti („párhuzamos”) áramvezetési lehetőségek száma a Sierpinski-háromszögben gyorsabb ütemben növekszik, mint a vezeték hossza, a csúcspontok közötti eredő ellenállás tehát bármilyen kicsivé tehető, ha n elegendően nagy.

2. A feladatban szereplő fraktálobjektumot *W. F. Sierpinski* (1882–1969) lengyel matematikusról nevezték el, aki többek között a halmazelméletben, a valós függvénytanban, a számelméletben és a topológiában is maradandót alkotott.