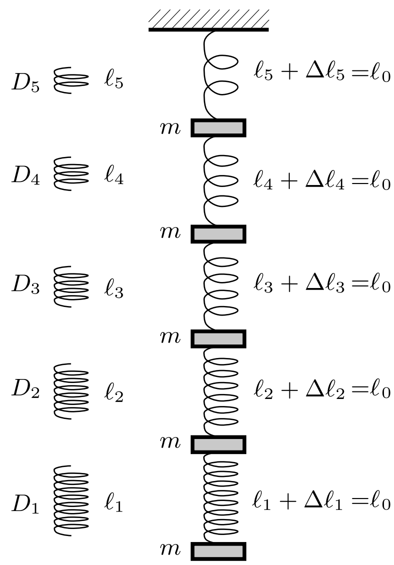
I. megoldás. Jelöljük a feldarabolás után kapott rugók nyújtatlan hosszát ℓ_k-val, a rugóállandóikat pedig D_k-val ($k=1,2,\ldots,n$). Az egyes rugódarabok rugóállandója fordítottan arányos a rugók hosszával, vagyis a megfelelő rugóhosszak és rugóállandók szorzata állandó:

$$\ell_1 D_1 = \ell_2 D_2 = \ldots = \ell_n D_n = LD,$$

és így az egyes darabok rugóállandója kifejezhető az eredeti rugó adataival:

$$D_k = \frac{DL}{\ell_k} \quad (k=1,2,\ldots,n).$$

a) Függesszük fel a rugókat és a nehezékeket a feladatban megadott módon, és számozzuk meg a rugókat lentről felfelé, ahogy azt az *ábra* mutatja.



A k-adik rugót az alatta lévő összes test súlya, tehát $k\cdot mg$ erő húzza, így a megnyúlása:

$$\Delta\ell_k = \frac{k\cdot mg}{D_k} = \frac{k\cdot mg}{DL}\ell_k = k\cdot \ell_k.$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $DL = mg$.) A megnyúlt rugók hossza (a kialakuló egyensúlyi állapotban) azonos ℓ_0 nagyságú, vagyis fennáll:

$$2\ell_1 = 3\ell_2 = 4\ell_3 = 5\ell_4 = 6\ell_5.$$

Fejezzük ki ℓ_5 segítségével a többi rugó nyújtatlan hosszát:

$$\ell_1 = 3\ell_5, \quad \ell_2 = 2\ell_5, \quad \ell_3 = \frac{3}{2}\ell_5, \quad \ell_4 = \frac{6}{5}\ell_5,$$

és mivel fennáll

$$\ell_1+\ell_2+\ell_3+\ell_4+\ell_5 = \left(3+2+\frac{3}{2}+\frac{6}{5}+1\right)\ell_5 = \frac{87}{10}\ell_5 = L,$$

a legfelső rugó hosszára $\ell_5 = \dfrac{10}{87}L$ adódik. Hasonló módok kapjuk a többi rugódarab hosszát is:

$$\ell_1 = \frac{30}{87}L, \quad \ell_2 = \frac{20}{87}L, \quad \ell_3 = \frac{15}{87}L, \quad \ell_4 = \frac{12}{87}L.$$

Az eredeti rugót tehát ($n=5$ esetén) $30:25:15:12:10$ arányban kell feldarabolnunk, így érhetjük el, hogy a terhelés után a hosszuk ugyanakkora legyen.

b) A rendszer tömegközéppontja eddig a középső test tömegközéppontjával azonos helyen, a rugók felfüggesztésétől $3\ell_0 = 18\ell_1 = \dfrac{60}{29}L$ távolságra volt. Ha most a rugósor alját δ távolsággal lehúzzuk, akkor mindegyik kis rugót feszítő erő ugyanakkora $F = D\delta$ értékkel növekszik, ennek hatására a megnyúlásuk valamekkora (rugónként különböző nagyságú) δ_k értékkel megnő. Felírhatjuk, hogy

$$F = D\delta = D_k\,\delta_k = \frac{DL}{\ell_k}\delta_k, \quad \text{vagyis} \quad \delta_k = \frac{\ell_k}{L}\delta,$$

azaz

$$\delta_1=\frac{30}{87}\,\delta,\quad \delta_2=\frac{20}{87}\,\delta,\quad \delta_3=\frac{15}{87}\,\delta,\quad \delta_4=\frac{12}{87}\,\delta,\quad \delta_5=\frac{10}{87}\,\delta.$$

A rugók megnyúlásából kiszámíthatjuk, hogy mennyivel kerülnek mélyebbre az egyes testek:

$$\Delta h_5=\delta_5=\frac{10}{87}\,\delta,\quad \Delta h_4=\delta_5+\delta_4=\frac{22}{87}\,\delta,\quad \Delta h_3=\delta_5+\delta_4+\delta_3=\frac{37}{87}\,\delta,$$
$$\Delta h_2=\delta_5+\delta_4+\delta_3+\delta_2=\frac{57}{87}\,\delta,\quad \Delta h_1=\delta_5+\delta_4+\delta_3+\delta_2+\delta_1=\frac{87}{87}\,\delta=\delta.$$

A felső két test tömegközéppontja

$$\Delta H_{(4,5)}=\frac{\Delta h_5+\Delta h_4}{2}=\frac{16}{87}\,\delta$$

távolsággal, az alsó két test tömegközéppontja pedig

$$\Delta H_{(1,2)}=\frac{\Delta h_1+\Delta h_2}{2}=\frac{72}{87}\,\delta$$

távolsággal kerül mélyebbre, a négy testből álló, $4m$ tömegű alrendszer tömegközéppontjának elmozdulása

$$\Delta H_{(1,2,4,5)}=\frac{H_{(1,2)}+H_{(4,5)}}{2}=\frac{44}{87}\,\delta.$$

Ha figyelembe vesszük még a középső (m tömegű) test Δh_3 elmozdulását is, megkapjuk az egész rendszer tömegközéppontjának (amely $4:1$ arányban osztja az m és a $4m$ tömegű részek közötti távolságot) keresett elmozdulását:

$$\Delta h_{\text{rendszer}}=\frac{4}{5}\Delta H_{1,2,4,5}+\frac{1}{5}\Delta h_3=\frac{71}{145}\,\delta\approx 0{,}49\,\delta.$$

II. megoldás. *b*) A feladat második része a munkatétel segítségével is megoldható. Ha a legalsó testet δ távolsággal lejjebb húzzuk, az ehhez szükséges F erő fokozatosan változik nulla és $D\delta$ között (hiszen a sorba kötött kis rugók együttese a szétdarabolás előtti, D direkciós erejű rugóval egyenértékű). A lehúzáskor végzett

$$W=F_{\text{átlagos}}\delta=\frac{1}{2}D\,\delta^2$$

munka egyrészt a rendszer helyzeti energiájának megváltozását, másrészt a rugók rugalmas energiájának növekedését fedezi:

$$W=\Delta E_{\text{helyzeti}}+\Delta E_{\text{rugalmas}},\quad \text{ahol}\quad \Delta E_{\text{helyzeti}}=-5mg\,\Delta h$$

(Δh a rendszer tömegközéppontjának keresett süllyedése), a rugók energiájának megváltozása pedig (az I. megoldás jelöléseit használva):

$$\Delta E_{\text{rugalmas}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{D_k}{2}\left[(\Delta\ell_k+\delta_k)^2-(\Delta\ell_k)^2\right]=\sum_{k=1}^{n}D_k\left(\Delta\ell_k\,\delta_k+\frac{1}{2}(\delta_k)^2\right).$$

Tudjuk, hogy $D_k=\dfrac{DL}{\ell_k}$, $\Delta\ell_k=k\,\ell_k$ és $\delta_k=\dfrac{\ell_k}{L}\delta$, innen kapjuk, hogy

$$\Delta E_{\text{rugalmas}}=D\delta\sum_{k=1}^{n}k\,\ell_k+\frac{1}{2}D\delta^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ell_k}{L}.$$

A jobb oldal második tagja éppen W-vel egyezik meg, így – a munkatétel egyenlete szerint – a tömegközéppont lesüllyedése ($mg=DL$ és $n=5$ esetén):

$$\Delta h=\frac{\delta}{L}\sum_{k=1}^{5}k\,\ell_k=\left(1\cdot\frac{30}{87}+2\cdot\frac{20}{87}+3\cdot\frac{15}{87}+4\cdot\frac{12}{87}+5\cdot\frac{10}{87}\right)\delta=\frac{71}{145}\,\delta.$$