Megoldás. A folyamatban a fényelektromos jelenség nyilvánul meg. Ha a katódot elég nagy frekvenciájú sugárzás éri, akkor az érkező fotonok elektronokat szakítanak ki belőle. Az $f = c/\lambda$ frekvenciájú fotonok hf energiájának egy része az elektronok kiszakítására fordítódik, ez a kilépési munka (W), a maradék $E_{\text{mozg.}}$ energiát pedig a kiszakított elektron kapja meg mozgási energia formájában: $hf = W + E_{\text{mozg.}}$.

A fenti összefüggés tehát így is felírható:

$$E_{\text{mozg.}} = \frac{hc}{\lambda} - W.$$

(h a Planck-állandó, c pedig a vákuumbeli fénysebesség.)

Megjegyzés. Az így kiszámított mozgási energia a legnagyobb energiával kilépő elektronokra vonatkozik, a fém „alacsonyabb energiaszintjeiről” kilökött elektronok ennél kisebb mozgási energiával rendelkeznek csak.

a) Ahhoz, hogy a katódból kilépő elektron ne érje el az anódot, olyan feszültséget kell alkalmazni, amely elegendő munkát végez az elektronon ahhoz, hogy az elveszítse mozgási energiáját. Az alkalmazott elektromos mező U feszültségű pontok között mozgó, $-e$ töltésű elektronon $W_{\text{mező}} = -eU$ munkát végez. Azt szeretnénk, hogy az elektron mozgási energiája ezzel a munkával zérussá váljon, vagyis teljesüljön:

$$E_{\text{mozg.}} + W_{\text{mező}} = 0,$$
$$\frac{hc}{\lambda} - W - eU_{\text{záró}} = 0.$$

Az ehhez szükséges „zárófeszültség”:

$$U_{\text{záró}} = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{W}{e} = 1{,}22\ \text{V}.$$

A térerősségnek a katódtól az anód felé kell mutatnia, ugyanis ekkor fog a negatív ($-e$) töltésű elektronra olyan erő hatni, hogy az a katód irányába gyorsuljon, az anódot pedig éppen ne érje el.

b) A katódon elnyelődő foton $p_{\text{foton}} = h/\lambda$ impulzust (lendületet) ad át a katódnak, a kilökött elektron pedig valamekkora p_{elektron} nagyságú lendületet visz el onnan. Az impulzusmegmaradás törvénye szerint a katódnak átadott impulzus a foton és az elektron impulzusvektorának különbsége, amelynek nagysága a fém felületére merőlegesen kilépő elektronok esetében $p_{\text{katód}} = p_{\text{foton}} + p_{\text{elektron}}$.

A kilépő (leggyorsabb) elektron mozgási energiája 1,22 eV (hiszen 1,22 V zárófeszültséggel még ez az elektron is lefékezhető). Ez az energia sokkal kisebb, mint az m tömegű elektron $mc^2 = 510$ keV nyugalmi energiája, ezért az elektron mozgását a klasszikus (nemrelativisztikus) törvényekkel írhatjuk le:

$$E_{\text{mozg.}} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{és} \qquad p_{\text{elektron}} = mv,$$

ahonnan a fémből kilökött elektron impulzusa:

$$p_{\text{elektron}} = \sqrt{2mE_{\text{mozg.}}} \approx 6{,}0 \cdot 10^{-25}\ \frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}}.$$

Ez lényegesen (mintegy 200-szor) nagyobb, mint a beeső foton

$$p = \frac{h}{\lambda} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-27}\ \frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}}$$

nagyságú impulzusa, emiatt a katód által felvett impulzus nagysága:

$$p_{\text{katód}} \approx p_{\text{elektron}} \approx 6{,}0 \cdot 10^{-25}\ \frac{\text{kg}\,\text{m}}{\text{s}}.$$

Ez az eredmény akkor is érvényes, ha az elektron *nem* a fém felületére merőlegesen lép ki a katódból.

c) Vizsgáljuk most a tetszőleges f frekvenciájú foton által létrehozott fényelektromos jelenséget. Tételezzük fel továbbra is a nemrelativisztikus fizikai törvények alkalmazhatóságát! A kilökött elektron és a beeső foton impulzusának aránya:

$$R(\lambda) = \frac{p_{\text{elektron}}}{p_{\text{foton}}} = \frac{c\sqrt{2m(hf - W)}}{hf} \equiv \sqrt{\frac{2mc^2}{W}\left(x - x^2\right)},$$

ahol x a dimenziótlan $W/(hf)$ mennyiséget jelöli. Ez az arány (x, tehát közvetve λ függvényében) akkor a legnagyobb, amikor

$$x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

maximális. Ez $x_0 = \dfrac{1}{2}$-nél következik be (vagyis amikor a foton energiája a kilépési munka 2-szerese), és a maximum értéke:

$$R_{\max} = \sqrt{\frac{mc^2}{2W}} \approx 261.$$

Az impulzusarány maximumánál az elektron sebessége még mindig sokkal kisebb a fénysebességnél, emiatt indokoltnak látszik a nemrelativisztikus képletek alkalmazása, de mivel R maximumát a λ paraméter teljes tartományában (akár a fénysebességet megközelítő sebességgel mozgó elektronokra is) keressük, érdemes a vizsgálatot relativisztikus képletekkel is végigvinni.

Egy $hf-W$ mozgási energiával, tehát $hf-W+mc^2$ teljes energiával rendelkező elektron relativisztikus impulzusa:

$$p_{\text{elektron}}=\sqrt{\left(\frac{hf-W+mc^2}{c}\right)^2-(mc)^2},$$

és a vizsgálandó arány (ismét az $x=W/(hf)$ mennyiséggel kifejezve):

$$R(x)=\sqrt{(1-x)^2+\frac{2mc^2}{W}\left(x-x^2\right)}.$$

Ennek szélsőértéke (a gyök alatti kifejezés teljes négyzetté alakításával, vagy más módszerekkel számolva)

$$x_0=\frac{mc^2-W}{2mc^2-W}\approx\frac{1}{2},$$

és az impulzusok aránya

$$R(x_0)=\sqrt{\frac{1}{2\frac{W}{mc^2}-\left(\frac{W}{mc^2}\right)^2}}\approx 261,$$

gyakorlatilag ugyanakkora, mint a nemrelativisztikus számolásnál.

Megjegyzések. 1. A fényelektromos jelenségben alacsony energiájú (néhány elektronvoltos) fotonok által kilökött elektronokat vizsgálunk. A folyamat során a foton elnyelődik, impulzusát a fém egészének adja át, energiája pedig a kilökődő elektron mozgási energiáját és a kilépési munkát fedezi. Nagyenergiájú (gamma-) fotonok és egy fém kölcsönhatása kiszámítható ugyan a fényelektromos hatás képletének formális alkalmazásával, de azok – fizikai okokból – nem írják le helyesen a jelenséget. Az elektron nyugalmi tömegével összemérhető energiájú fotonok nem a fémkristály egészével, hanem annak csak egy-egy szabadnak tekinthető részecskéjével lépnek kölcsönhatásba, mert az ilyen nagy energiájú gammakvantumok számára az elektronok kötési energiája elhanyagolható.

2. Egy szabad elektron nem képes elnyelni egyetlen fotont, mert nem teljesülhet egyszerre az energia- és az impulzusmegmaradás követelménye. Ilyen esetekben a Compton-szórás (foton + elektron $\Rightarrow$ foton + elektron), illetve a párkeltés (foton + atommag $\Rightarrow$ elektron + pozitron + atommag) folyamata válik fontossá.