Megoldás. A **P. 4646.** feladatnak a Fermat-elvre hivatkozó megoldása szerint a levegőből egy n törésmutatójú üvegrúdba belépő fénysugarak akkor fókuszálódnak az üvegrúd tengelyén egyetlen (f távolságban lévő) pontba, ha az üveg határfelülete az

$$y+n\sqrt{x^2+(f-y)^2}=nf \tag{1}$$

egyenlettel jellemzett vezérgörbéjű forgásfelület. Ez az egyenlet algebrai átalakítások után

$$\frac{x^2}{\frac{n-1}{n+1}f^2}+\frac{\left(y-\frac{n}{n+1}f\right)^2}{\left(\frac{n}{n+1}f\right)^2}=1 \tag{2}$$

alakra hozható, ami egy olyan ellipszist ír le, amelynek féltengelyei

$$a=\frac{n}{n+1}f \qquad \text{és} \qquad b=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}f.$$

A fenti megállapítások a jelen feladatra (amikor az n törésmutatójú üvegből lépnek ki a fénysugarak és a levegőben fókuszálódnak) is érvényben maradnak, ha az (1) és (2) képletekben n helyébe $1/n$-et írunk, hiszen éppen ekkora a levegőnek üvegre vonatkoztatott (relatív) törésmutatója. Ezek szerint a határfelület vezérgörbéjének egyenlete:

$$\frac{x^2}{\frac{1-n}{1+n}f^2}+\frac{\left(y-\frac{1}{1+n}f\right)^2}{\left(\frac{1}{1+n}f\right)^2}=1. \tag{2'}$$

Ez az egyenlet (mivel $1-n<0$, tehát az x^2-es tag együtthatója negatív) egy olyan hiperbolát ír le, amelynek féltengelyei:

$$a'=\frac{1}{1+n}f \qquad \text{és} \qquad b'=\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}f,$$

és ezek segítségével a vezérgörbe egyenlete:

$$-\frac{x^2}{b'^2}+\frac{(y-a')^2}{a'^2}=1.$$

Megjegyzés. Az *ábrán* F-fel jelölt optikai fókuszpont (amely az üvegrúd „csúcsától” f távolsága van) éppen a távolabbi hiperbolaág matematikai értelemben vett fókuszpontjával esik egybe, hiszen

$$c+a'=\sqrt{a'^2+b'^2}+a'=$$
$$=\sqrt{\frac{f^2}{(1+n)^2}+\frac{n-1}{n+1}f^2}+\frac{1}{n+1}f=f.$$