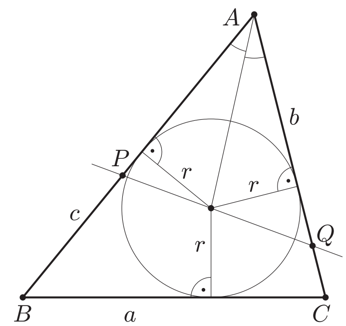
I. megoldás. Jelölje a háromszög csúcsait a szokásos módon A, B és C, a beírt kör középpontját O, sugarát r, az A-nál lévő szög pedig legyen α (*1. ábra*).



1. ábra

Írjuk fel az APQ háromszög területét kétféleképpen:

$$T_{APQ} = \frac{pq\sin\alpha}{2} \quad \text{és} \quad T_{APQ} = T_{APO} + T_{AOQ} = \frac{pr}{2} + \frac{qr}{2} = \frac{(p+q)r}{2}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$pq\sin\alpha = (p+q)r. \tag{1}$$

Az ABC háromszög területét kétféleképpen felírva pedig:

$$T_{ABC} = \frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2},$$

azaz

$$(a+b+c)r = bc\sin\alpha \tag{2}$$

adódik. Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva kapjuk, hogy

$$pq\sin\alpha\cdot(a+b+c)r = (p+q)r\cdot bc\sin\alpha,$$

amiből $bcpqr\sin\alpha \neq 0$-val való osztás és rendezés után a bizonyítandó

$$\frac{a+b+c}{bc} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

egyenlőséget kapjuk.

II. megoldás. Először belátunk egy segédtételt.

Ha valamely M csúcsú szög szögfelezőjének rögzített T pontján átmenő tetszőleges egyenes a szög szárait a K és L pontokban metszi, akkor az $1/MK + 1/ML$ kifejezés értéke független a szelőegyenes helyzetétől.

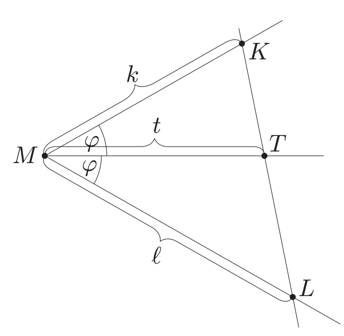
Legyen a szög nagysága 2φ, $MT = t$, $MK = k$ és $ML = \ell$ (*2. ábra*). Ekkor

$$\begin{aligned} k\ell\sin 2\varphi = 2T_{MKL} = 2T_{MTK} + 2T_{MTL} = \\ = tk\sin\varphi + t\ell\sin\varphi. \end{aligned}$$

Ebből rendezés után

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell} = \frac{\sin 2\varphi}{t\sin\varphi}$$

adódik, ami bizonyítja segédtételünk állítását.



2. ábra

Ezután eredeti feladatunk megoldása már egyszerű. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, továbbá legyen a B-ből induló szögfelező és az AC oldal metszéspontja D. A szögfelezőtétel szerint D a c és a oldalak arányában osztja az AC szakaszt, ezért $AD = \dfrac{cb}{c+a}$. Másrészt O rajta van az ABC szögfelezőin, ezért a BAC szögre és az O pontra alkalmazhatjuk segédtételünket. E szerint

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{1}{c}+\frac{1}{\frac{cb}{c+a}}=\frac{1}{c}+\frac{c+a}{cb}=\frac{a+b+c}{bc},$$

ami éppen a bizonyítandó állítás.