Megoldás. Legyen a kúp alaplapjának sugara r, a magassága m, az alkotója pedig a. A kúp felszín-, illetve térfogatképlete:

$$A = r^2\pi + r\pi a = r\pi(r+a), \qquad V = \frac{r^2\pi m}{3}.$$

Ezeket behelyettesítve az igazolandó egyenlőtlenségbe:

$$r^3\pi^3(r+a)^3 \geq \frac{72\pi r^4\pi^2 m^2}{9}.$$

A lehetséges egyszerűsítések után pedig:

$$(r+a)^3 \geq 8r \cdot m^2.$$

Pitagorasz tétele alapján tudjuk, hogy $m^2 = a^2 - r^2 = (a+r)(a-r)$. Ezt beírva egyszerűsíthetünk a pozitív $(a+r)$-rel is:

$$(r+a)^2 \geq 8r(a-r).$$

Rendezés után

$$a^2 + 2ar + r^2 \geq 8ar - 8r^2, \qquad a^2 - 6ar + 9r^2 = (a-3r)^2 \geq 0.$$

Teljes négyzetet kaptunk, az átalakításaink ekvivalensek voltak, így az eredeti egyenlőtlenség igaz. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$a = 3r, \quad m = r\sqrt{8} = 2\sqrt{2}r.$$