I. megoldás. *a*) Jelölje az első n prímszámot $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$.

Megadunk egy algoritmust, amellyel két részre lehet őket osztani úgy, hogy a két részben a tagok összege megegyezzen, ha $n = 2013^{2014}$.

Először p_n-et betesszük az első részbe, utána p_{n-1}-et a második részbe. Ezután minden lépésben a még be nem osztott prímszámok közül a legnagyobbat oda tesszük, ahol a tagok összege kisebb (ha éppen egyenlő a két összeg, akkor tetszés szerint választunk). Vagyis a k-adik lépés után a $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{n-k+1}$ prímek lesznek szétosztva két részre.

Megmutatjuk, hogy a két részben a tagok összege legfeljebb p_{n-k+1}-gyel, vagyis az utoljára beosztott prímmel térhet el. Ezt k szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk, $k = 1$-re az állítás nyilvánvalóan teljesül.

Tegyük fel, hogy az állítást már igazoltuk k-ra, megmutatjuk, hogy $k+1$-re is igaz. Az indukciós feltevés szerint a $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_{n-k+1}$ prímeket két részre lehet osztani úgy, hogy a két részben a tagok összege legfeljebb p_{n-k+1}-gyel tér el. Ha a soron következő p_{n-k} prím beosztása után abban a részben lesz nagyobb a tagok összege, ahova kerül, akkor legfeljebb p_{n-k}-val lehet nagyobb, mint a másik részben, hiszen eddig a másik részben nagyobb (vagy éppen ugyanannyi) volt a tagok összege. Ha pedig továbbra is a másik részben marad nagyobb az összeg, akkor az eltérés az indukciós feltevést is használva legfeljebb $p_{n-k+1} - p_{n-k}$. Ez viszont Csebisev tétele szerint valóban legfeljebb p_{n-k}, hiszen ellenkező esetben a p_{n-k} szám és annak kétszerese közé nem esne prím.

Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges $1 \le k \le n$ esetén a k-adik lépés után a két részben a tagok összege legfeljebb p_{n-k+1}-gyel, vagyis az utoljára beosztott prímmel térhet el. Ez egyben azt is jelenti, hogy az utolsó prím, vagyis a 2 hozzáadása után a két rész különbsége legfeljebb 2 lesz. A különbség nem lehet 1, hiszen $n = 2013^{2014}$ esetén az első n prímszám összege páros, így a két részben a számok összegének ugyanaz a paritása. Ha a különbség 0, akkor készen vagyunk, találtunk egy jó beosztást.

Most tegyük fel, hogy a különbség 2. Ekkor a 2 hozzáadása előtt a két részben az összeg éppen egyenlő, ezt a közös értéket jelölje S. A szimmetria miatt feltehető, hogy a 3 az első részbe került. Ekkor az 5 nem kerülhetett az első részbe, ugyanis ekkor a 7 beosztása után a két részben $S-8$, illetve S lett volna a prímek összege, és így 7-nél nagyobb lett volna a különbség. Tehát az 5 a második részbe került.

Először tegyük fel, hogy a 7 az első részbe került. A 11 nem kerülhetett az első részbe, mert akkor a 13 beosztása utáni különbség $(S-5)-(S-3-7-11) = 16 > 13$ lett volna, így a 11 a második részbe került. Ha a 11-et áttesszük az első részbe, a 3-at és a 7-et pedig a másodikba, akkor az elsőben $S+1$, a másodikban $S-1$ lesz az összeg, így a 2-t a másodikba téve egyenlő összegeket kapunk.

Végül tegyük fel, hogy a 7 a második részbe került. Az előzőekhez hasonlóan látható, hogy a 11 csak az első részbe kerülhetett. Ekkor viszont a 11-et áttéve a második részbe, az 5-öt és a 7-et pedig az elsőbe, a két kialakuló összeg megint $S+1$ és $S-1$, vagyis a 2-t a második részbe téve ismét egyenlő összegeket kapunk.

Ezzel megmutattuk, hogy $n = 2013^{2014}$ esetén a kívánt szétosztás megvalósítható.

b) A 2014^{2013} szám páros, így az első 2014^{2013} prímszám összege páratlan, hiszen egy darab páros szám (2) és páratlan sok páratlan szám összege. Ebből azonnal következik, hogy nem lehet két részre osztani az első 2014^{2013} prímszámot úgy, hogy azokban a tagok összege megegyezzen.

II. megoldás az *a*) **részre.** Az I. megoldásban ismertetett algoritmust használva a következőképpen is okoskodhatunk. Legyen az $n-5$-ödik lépés után kapott két összeg A és B, melyek eltérése az előzőek szerint legfeljebb $p_6 = 13$. Legyen $A \le B$. Mivel $n = 2013^{2014}$ esetén $A + B$ páros (páros sok páratlan prím összege), ezért $B - A$ lehetséges értékei: $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$. Elég megmutatni, hogy a $2, 3, 5, 7, 11$ prímeket mindegyik esetben szét lehet úgy osztani két részre, hogy a két rész különbsége éppen $B - A$ legyen. Ehhez a 12-nél nem nagyobb páros nemnegatív egészeket kell felírnunk az első 5 prímszám előjeles összegeként, ami mindegyik esetben megtehető:

$$0 = 2-3+5+7-11, \quad 2 = -2+3+5+7-11, \quad 4 = -2-3+5-7+11,$$
$$6 = 2+3+5+7-11, \quad 8 = -2-3-5+7+11,$$
$$10 = -2+3+5-7+11, \quad 12 = 2-3-5+7+11.$$