Megoldás. Az $n=1$ nyilván megoldás, mivel $d\big(1^3\big)=d(1)=1$.

$n\neq 1$ esetén legyen n prímtényezős felbontása $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$, ahol minden $\alpha_i>0$ és $p_1<p_2<\dots<p_k$ prímek. Az osztók számára vonatkozó ismert összefüggés alapján

$$d\big(n^3\big)=d\Big(\big(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}\big)^3\Big)=(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1).$$

A feladatban szereplő egyenlet így a következő formában írható fel:

$$(3\alpha_1+1)(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}.$$

A bal oldal minden zárójelében 3-mal osztva 1 maradékot adó szám áll, így a szorzat is 1 maradékot ad 3-mal osztva. Ezek szerint a prímek között nem szerepelhet a 3. Az egyenletet törtes alakban átírhatjuk:

$$\frac{3\alpha_1+1}{p_1^{\alpha_1}}\cdot\frac{3\alpha_2+1}{p_2^{\alpha_2}}\cdot\ldots\cdot\frac{3\alpha_k+1}{p_k^{\alpha_k}}=1. \tag{1}$$

Mivel a bal oldali (pozitív) tényezők szorzata 1, a tényezők között van olyan, amely legalább 1, vagyis van olyan j, amelyre

$$1\le\frac{3\alpha_j+1}{p_j^{\alpha_j}}.$$

Először vizsgáljuk meg a $p_j\neq 2$ esetet. Ekkor (mivel $p_j\neq 3$), $5\le p_j$, tehát

$$1\le\frac{3\alpha_j+1}{p_j^{\alpha_j}}\le\frac{3\alpha_j+1}{5^{\alpha_j}}.$$

$\alpha_j=1$-re az $1\le\dfrac{3\alpha_j+1}{5^{\alpha_j}}$ egyenlőtlenség nem teljesül, így semmilyen $1<\alpha_j$-re sem teljesül, mivel a $\dfrac{3\alpha+1}{5^{\alpha}}$ sorozat szigorúan monoton csökken, hiszen

$$\begin{aligned}\frac{3\alpha+1}{5^{\alpha}}&>\frac{3\alpha+4}{5^{\alpha+1}},\\ 5(3\alpha+1)&>3\alpha+4,\\ 12\alpha+1&>0.\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy $p_j\neq 2$ esetén $1\le\dfrac{3\alpha_j+1}{p_j^{\alpha_j}}$ nem teljesülhet. Következésképpen n prímtényezős felbontásában szerepel a 2, melynek α_1 kitevőjére

$$1\le\frac{3\alpha_1+1}{2^{\alpha_1}}.$$

Az egyenlőtlenség $\alpha_1=1,2,3$-ra teljesül, $\alpha_1=4$-re viszont nem. Így, mivel a $\dfrac{3\alpha+1}{2^{\alpha}}$ sorozat pozitív α esetén szigorúan monoton csökken (ez a fenti, $\dfrac{3\alpha+1}{5^{\alpha}}$ sorozatnál látott módon belátható), $\alpha_1>4$-re sem igaz. Ezzel beláttuk, hogy

$$n=2\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}\quad\text{vagy}\quad n=2^2\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}\quad\text{vagy}\quad n=2^3\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}.$$

a) $n=2\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n=d\big(n^3\big)=4\cdot(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1),$$

ahonnan n osztható 4-gyel. Ezek szerint ez az eset nem lehetséges, mert az n prímtényezős felbontásában a 2 csak első hatványon szerepel.

b) $n=2^2\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n=d\big(n^3\big)=7\cdot(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1),$$

így n prímtényzős felbontásában szerepel a 7. Ha első hatványon szerepel, és több prímosztója nincs n-nek, akkor $n=2^2\cdot 7=28$, melyre $d\big(n^3\big)=(3\cdot 2+1)(3\cdot 1+1)=28$, tehát ez megoldás. Ha az n prímtényezős felbontásában a 7 az 1-nél nagyobb hatványon szerepelne, vagy más prímosztói is lennének n-nek, akkor az (1) egyenlőség nem teljesülhetne, hiszen a bal oldalon álló kifejezést biztosan csökkentenénk, így kisebb lenne 1-nél (ha a 7 nagyobb hatványon szerepelne, akkor azért, mert a $p_i(\alpha)=\dfrac{3\alpha+1}{p_i^{\alpha}}$ sorozat szigorúan monoton csökken, ha pedig n prímtényezős felbontásában más prímek is szerepelnének, akkor azért, mert $\dfrac{3\alpha_i+1}{p_i^{\alpha_i}}<1$, ha $p_i\neq 2$). Így ebben az esetben $n=28$ az egyetlen megoldás.

c) $n=2^3\cdot p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ esetén

$$n=d(n^3)=10\cdot(3\alpha_2+1)\dots(3\alpha_k+1),$$

tehát az n prímtényzős felbontásában szerepel az 5. Az $n=2^3\cdot 5=40$ megoldása a feladatnak, más megoldás pedig ebben az esetben sincs (ugyanúgy csak csökkenteni tudnánk (1)-ben a bal oldal értékét, ahogyan az előző részben).

Ezzel beláttuk, hogy a feladat megoldásai $n=1$, $n=28$ és $n=40$.