Megoldás. Legyen $\|\beta\| = \min\big\{|\beta - n| \colon n \in \mathbb{Z}\big\}$. Először igazoljuk azt a jól ismert állítást, hogy tetszőleges β, γ valós számokra fennáll a $\|\beta+\gamma\| \le \|\beta\| + \|\gamma\|$ egyenlőtlenség. Definíció szerint léteznek olyan b és c egész számok, melyekre $\beta - b = \pm\|\beta\|$ és $\gamma - c = \pm\|\gamma\|$. Így

$$\|\beta+\gamma\| \le |\beta+\gamma-(b+c)| \le |\beta - b| + |\gamma - c| = \|\beta\| + \|\gamma\|.$$

Az imént bevezetett jelöléssel

$$N_q(\alpha) = \min\left\{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \colon p \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{1}{q}\min\big\{|q\alpha - p| \colon p \in \mathbb{Z}\big\} = \frac{\|q\alpha\|}{q}.$$

Vizsgáljuk most

$$N_{2q}(\alpha) + N_{2q+1}(\alpha) = \frac{\|2q\alpha\|}{2q} + \frac{\big\|(2q+1)\alpha\big\|}{2q+1}$$

értékét. Először megmutatjuk, hogy a $\|2q\alpha\| \ge \|\alpha\|/2$ és a $\big\|(2q+1)\alpha\big\| \ge \|\alpha\|/2$ egyenlőtlenségek közül legalább az egyik teljesül. Ha ugyanis $\|2q\alpha\| < \|\alpha\|/2$, akkor

$$\big\|(2q+1)\alpha\big\| = \|2q\alpha + \alpha\| \ge \|\alpha\| - \|2q\alpha\| \ge \|\alpha\| - \|\alpha\|/2 = \|\alpha\|/2.$$

Tehát az állítás valóban teljesül.

Ekkor viszont az $N_{2q}(\alpha) \ge \dfrac{\|\alpha\|/2}{2q}$ és az $N_{2q+1}(\alpha) \ge \dfrac{\|\alpha\|/2}{2q+1}$ egyenlőtlenségek közül is legalább az egyik teljesül, és mivel $N_{2q}(\alpha)$ és $N_{2q+1}(\alpha)$ is nemnegatív, valamint $\max(2q, 2q+1) \le 3q$, azért $N_{2q}(\alpha) + N_{2q+1}(\alpha) \ge \dfrac{\|\alpha\|/2}{3q}$.

Ezt az egyenlőtlenséget $q = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \dfrac{k-1}{2} \right\rfloor$-re felírva és összeadva a következő becslést kapjuk:

$$\sum_{q=1}^{k} N_q(\alpha) \ge \sum_{q=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{\|\alpha\|}{6q}.$$

Az α irracionális, ezért $\|\alpha\| > 0$, továbbá $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q} = \infty$, így elegendően nagy k-ra

$$\sum_{q=1}^{k} N_q(\alpha) \ge \sum_{q=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{\|\alpha\|}{6q} > 1$$

teljesül.