Megoldás. Az $n = 1$ nem megoldása az egyenletnek, ezért $n \geq 2$. Legyen n prímtényezős felbontása $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, ahol $k \geq 1$, $p_1, p_2, \dots, p_k$ különböző prímszámok, és $a_1, a_2, \dots, a_k$ pozitív egészek. Ezekkel a jelölésekkel

$$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1),$$
$$d(n^3) = (3a_1 + 1)(3a_2 + 1) \dots (3a_k + 1).$$

A $3a_i + 1$ alulról becsülhető:

$$3a_i + 1 = 2a_i + a_i + 1 \geq 2a_i + 2 = 2(a_i + 1).$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} 5 \cdot d(n) &= 5 \cdot (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1) = (3a_1 + 1)(3a_2 + 1) \dots (3a_k + 1) \geq \\ &\geq 2(a_1 + 1) 2(a_2 + 1) \dots 2(a_k + 1) = 2^k \cdot d(n), \\ 5 \cdot d(n) &\geq 2^k \cdot d(n), \end{aligned}$$

ahol k pozitív egész. Ebből már látható, hogy csak $k = 1$ és $k = 2$ lehetséges.

Ha $k = 1$, akkor

$$5(a_1 + 1) = 3a_1 + 1, \qquad a_1 = -2,$$

nem kapunk megoldást.

Legyen végezetül $k = 2$. Ekkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 5(a_1 + 1)(a_2 + 1) &= (3a_1 + 1)(3a_2 + 1), \\ 5 &= 4a_1 a_2 - 2a_1 - 2a_2 + 1, \\ 5 &= (2a_1 - 1)(2a_2 - 1). \end{aligned}$$

Az 5 csak egyféleképpen bontható pozitív egészek szorzatává. Látjuk, hogy a_1 és a_2 közül az egyik 1, a másik 3. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a_1 = 3$ és $a_2 = 1$. Tehát $n = p^3 \cdot q$, ahol p és q különböző prímek.

Az ilyen alakú számok valóban megoldások, mert $d(n) = d\big(p^3 q\big) = 4 \cdot 2 = 8$ és $d\big(n^3\big) = d\big(p^9 q^3\big) = 10 \cdot 4 = 40$.