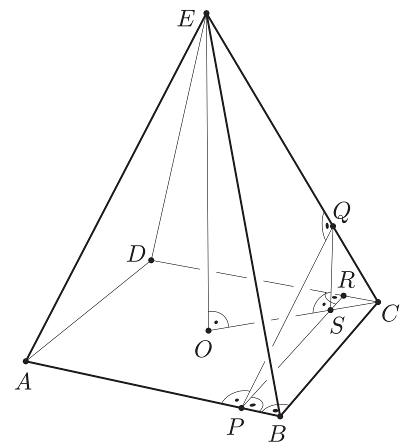
I. megoldás. Legyen O az $ABCD$ négyzet középpontja, R a DC szakasz C-hez legközelebbi hetedelőpontja, S pedig a Q pont merőleges vetülete az $ABCD$ síkon.



A gúla szabályosságából következően a CE egyenes merőleges vetülete az $ABCD$ síkon a CO egyenes, ezért S rajta van a CO egyenesen. Mivel $AP : PB = 6 : 1$, a PR egyenes párhuzamos BC-vel, vagyis merőleges AB-re. PQ is merőleges AB-re, ezért AB merőleges a PQR síkra. Tehát az AB-re merőleges QS egyenes benne van a PQR síkban, vagyis S illeszkedik a PR egyenesre.

A CRS háromszög derékszögű és egyenlőszárú, ezért $RS = 1/7$ és $CS = CR\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$. A QSC és EOC háromszögek hasonlóak, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság aránya $CS : CO = \dfrac{\sqrt{2}}{7} : \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2 : 7$. Ha tehát $CQ = y$, akkor $CE = \dfrac{7y}{2}$.

A QSC és QSP derékszögű háromszögekben Pitagorasz tétele szerint

$$QS^2 = CQ^2 - CS^2 = y^2 - \frac{2}{49},$$
$$QP^2 = QS^2 + SP^2 = \left(y^2 - \frac{2}{49}\right) + \left(\frac{6}{7}\right)^2 = y^2 + \frac{34}{49}.$$

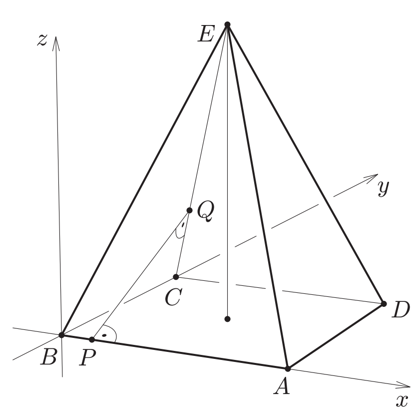
Végül a PQC és PBC derékszögű háromszögek közös PC átfogójának négyzetét szintén Pitagorasz tétele szerint felírva kapjuk, hogy

$$PC^2 = CQ^2 + QP^2 = BC^2 + BP^2, \quad \text{azaz} \quad y^2 + \left(y^2 + \frac{34}{49}\right) = 1 + \frac{1}{49}.$$

Ezt az egyenletet rendezve $2y^2 = \dfrac{16}{49}$, azaz $y = \dfrac{\sqrt{8}}{7}$ adódik.

Tehát a gúla oldaléleinek hossza $CE = \dfrac{7y}{2} = \sqrt{2}$.

II. megoldás. Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy az $ABCD$ négyzet B csúcsa legyen az origó, A és C pedig az x, illetve y tengely pozitív felén legyen. Ekkor $A(1,0,0)$ és $C(0,1,0)$, a gúla szabályossága miatt pedig $E(1/2, 1/2, e)$ ahol $|e| \neq 0$ az E csúcs $ABCD$ laptól való távolsága. Az $AP : PB = 6 : 1$ arány miatt $P(1/7, 0, 0)$.



Legyen $CQ : CE = \lambda$. Ekkor a szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáira vonatkozó képlet alapján kapjuk, hogy $Q\left(\frac{\lambda}{2}, 1-\frac{\lambda}{2}, e\lambda\right)$. A PQ szakasz és az x tengely merőlegessége miatt P és Q első koordinátája megegyezik, azaz $1/7 = \lambda/2$, vagyis $\lambda = 2/7$. Tehát $Q\left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2e}{7}\right)$. Ezért

$$\overrightarrow{PQ} = \left(0, \frac{6}{7}, \frac{2e}{7}\right) \quad \text{és} \quad \overrightarrow{CE} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, e\right).$$

A feltétel szerint e két vektor merőleges egymásra, ezért skaláris szorzatuk 0. Ezt felírva kapjuk, hogy

$$0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2e}{7} \cdot e = 0, \quad \text{azaz} \quad e^2 = \frac{3}{2}.$$

A CE szakasz hossza két pont távolságképlete alapján

$$CE = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + e^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2}.$$

Tehát a gúla oldalélei $\sqrt{2}$ hosszúságúak.