I. megoldás. Próbáljuk meg a bal oldalt teljes négyzetek összegeként vagy különbségeként felírni. Mivel szerepel benne $2xy$ és $-2x$, nézzük meg, mi marad, ha az $(x+y-1)^2$ kifejezést beírjuk:

$$x^2-3y^2+2xy-2x-10y+20=(x+y-1)^2-4y^2-8y+19=$$
$$=(x+y-1)^2-(2y+2)^2+23.$$

Tehát az egyenlet így alakul:

$$(x+y-1)^2-(2y+2)^2=-23,$$
$$(x+y-1+2y+2)(x+y-1-2y-2)=-23,$$
$$(x+3y+1)(x-y-3)=-23.$$

A -23 kétféleképpen áll elő két egész szám szorzataként: $-23=(-1)\cdot 23=1\cdot(-23)$.

I. eset: $x+3y+1=-1$, $x-y-3=23$. Az elsőből a másodikat kivonva: $4y+4=-24$, amiből $y=-7$, és innen $x=19$.

II. eset: $x+3y+1=1$, $x-y-3=-23$. Ebből $4y+4=24$, amiből $y=5$ és $x=-15$ következik.

III. eset: $x+3y+1=23$, $x-y-3=-1$. Innen $4y+4=24$, amiből $y=5$ és $x=7$ következik.

IV. eset: $x+3y+1=-23$, $x-y-3=1$, ahonnan $4y+4=-24$, és így $y=-7$ és $x=-3$ következik.

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, így a négy megoldás: $(x_1;y_1)=(19;-7)$, $(x_2;y_2)=(-15;5)$, $(x_3;y_3)=(7;5)$, $(x_4;y_4)=(-3;-7)$.

II. megoldás. Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét x-re:

$$0=x^2-3y^2+2xy-2x-10y+20=x^2+2(y-1)x-3y^2-10y+20,$$
$$x_{1;2}=\frac{-2(y-1)\pm\sqrt{4(y-1)^2-4\big(-3y^2-10y+20\big)}}{2}=$$
$$=-y+1\pm\sqrt{y^2-2y+1+3y^2+10y-20}=-y+1\pm\sqrt{4y^2+8y-19}.$$

Az y egész szám, ezért x akkor egész, ha a gyök alatt négyzetszám áll: $4y^2+8y-19=n^2$, ahol $n\in\mathbb{Z}^+$. Ezt tovább alakítva: $(2y+2)^2-23=n^2$, azaz $(2y+2)^2-n^2=23$. Mivel $2y+2$ és n is egész, két olyan négyzetszámot keresünk, melyek különbsége 23. A négyzetszámok sorozata az első 13 elemig felírva:

$$0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ 49;\ 64;\ 81;\ 100;\ 121;\ 144.$$

A különbség ezután csak nő, ezért az egyetlen megoldás (a nem szomszédos elemeket is végignézve) a $144-121=23$. Tehát $(2y+2)^2=121+23=144$, amiből $2y+2=\pm12$.

I. eset: $2y+2=12$, ebből $y=5$ és $x_{1;2}=-5+1\pm\sqrt{4\cdot 25+8\cdot 5-19}=4\pm 11$, $x_1=7$ és $x_2=-15$.

II. eset: $2y+2=-12$, ebből $y=-7$ és $x_{3;4}=7+1\pm\sqrt{4\cdot 49-8\cdot 7-19}=8\pm 11$, $x_3=19$ és $x_4=-3$.

Az egyenlet megoldásai: $(7;5)$, $(-15;5)$, $(19;-7)$, $(-3;-7)$.