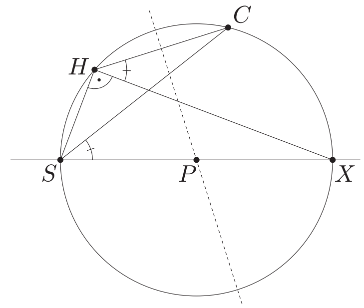
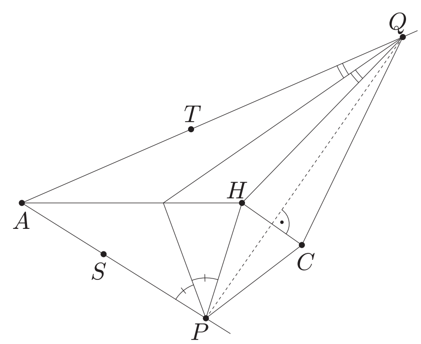
Fehér Zsombor megoldása. Mindenekelőtt a $CHS\sphericalangle - CSB\sphericalangle = 90^\circ$ feltételt fogjuk értelmezni. Ehhez vegyük fel az AB egyenesen azt az X pontot, melyre $SHX\sphericalangle$ derékszög (*1. ábra*). Ekkor $CHX\sphericalangle = CHS - 90^\circ = CSB\sphericalangle$. Tehát $CHX\sphericalangle = CSX\sphericalangle$, így $CHSX$ húrnégyszög. És mivel $SHX\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a Thalész-tétel alapján a $CHSX$ kör középpontja SX felezőpontja, ami legyen P.



1. ábra

A TSH háromszög körülírt körének középpontját az SH és TH oldalak szakaszfelező merőlegesének metszéspontjaként fogjuk meghatározni (*2. ábra*). SH felezőmerőlegese ugyanaz, mint $SPH\sphericalangle$ szögfelezője, hiszen PSH egyenlőszárú háromszög. Ezáltal az ábra már is sokat egyszerűsödött: csak vesszük HC felezőmerőlegesét, ez P-ben és Q-ban metszi AB-t és AD-t, majd tekintjük a $HPA\sphericalangle$ és $HQA\sphericalangle$ szögfelezőjét (a belső szögfelezőt, mert az S és a T pont az AP, illetve az AQ szakasz belsejében helyezkedik el). Azt kell belátnunk, hogy ezek metszéspontja rajta van az AH szakaszon, hiszen ekkor $AH \perp BD$ miatt BD valóban érinteni fogja a THS kört.



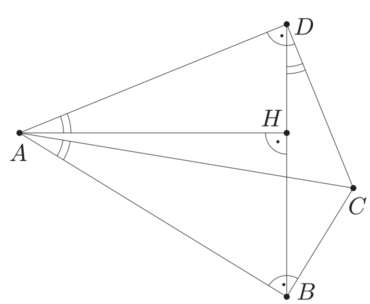
2. ábra

Lemma. *Tetszőleges $KLMN$ négyszögre a K-ból és M-ből kiinduló belső szögfelezők pontosan akkor metszik egymást az LN átlón, mint amikor az L-ből és N-ből kiinduló szögfelezők a KM átlón.*

Bizonyítás. A szögfelezőtétel alapján, ha a K, M szögfelezők mindketten az O pontban metszik LN-t, akkor $KL/KN = OL/ON = ML/MN$. Így $KL/ML = KN/MN$ alapján az L, N szögfelezők ugyanolyan arányban osztják a KM szakaszt, azaz ugyanott metszik a KM átlót. Vagyis mindkettő pontosan akkor teljesül, ha a négyszög szemközti oldalainak szorzata egyenlő.

A lemmát alkalmazva az $APHQ$ négyszögre, azt kell belátnunk, hogy a $PAQ\sphericalangle$ és $PHQ\sphericalangle$ szögfelezője a PQ egyenesen metszi egymást.

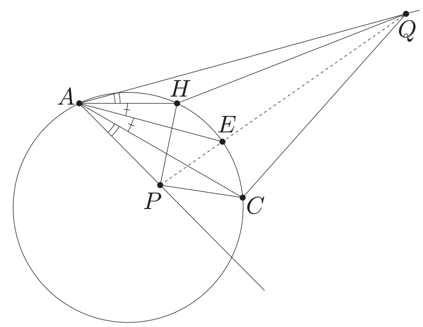
Még nem használtuk a feladat $ABC\sphericalangle = CDA\sphericalangle = 90^\circ$ feltételét (*3. ábra)*. Ez alapján $ABCD$ húrnégyszög, így $BAC\sphericalangle = BDC\sphericalangle = 90^\circ - ADH\sphericalangle = HAD\sphericalangle$.



3. ábra

Megjegyzés. A feladat B és D pontját, illetve az ott lévő derékszögeket tulajdonképpen csak arra használjuk, hogy $BAC\sphericalangle = HAD\sphericalangle$ teljesüljön. Valójában a C pontot szabadon mozgathatjuk az AC egyenesen, az állítás érvényben marad.

Legyen az AHC kör és a PQ egyenes metszéspontja E (*4. ábra*). Mivel HC felezőmerőlegesén van E, a HC ív felezőpontja E, ezért $HAE\sphericalangle = EAC\sphericalangle$. És mivel $QAH\sphericalangle = CAP\sphericalangle$, a QAP szögfelezője nem más, mint AE. Az AHC kör középpontja rajta van HC felezőmerőlegesén, PQ-n, ezáltal a kör tükrös PQ-ra. Azon pontok halmaza, melyek P-től és Q-tól mért távolságainak aránya állandó, és ez az állandó AP/AQ, egy Apollóniusz-kör. Mégpedig egy olyan Apollóniusz-kör, ami átmegy A-n, és a szögfelezőtétel miatt E-n, emellett tükrös a PQ egyenesre. Így ez a kör csak az AHC kör lehet. Tehát H is rajta van az Apollóniusz-körön, így $HP/HQ = AP/AQ$, és $PHQ\sphericalangle$ szögfelezője is átmegy E-n. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.



4. ábra

Megjegyzések. 1. Amennyiben az A, H, C pontok egy egyenesre esnek, az Apollóniusz-kör helyét egy felező merőleges veszi fel. Ebben az esetben az egész ábra szimmetrikus, a feladat állítása pedig triviális. Annak ellenére, hogy ráadásul a fenti bizonyítás is lényegében ugyanúgy működik, a versenyzők ezen megjegyzés hiányában – mint minden speciális eset elmulasztásáért – maximálisan 6 pontot kaphattak.

2. A megoldás utolsó lépésének alapja a következő egyszerű, de mégis meglepő tétel, amit érdemes lehet megjegyezni:

Tétel. *Ha $ABCD$ deltoid, akkor a $\{P \mid APB\sphericalangle \equiv DPC\sphericalangle \pmod{180^\circ}\}$ halmaz, vagyis azon pontok mértani helye, melyekből az AB és DC szakaszok ugyanakkora irányított szögben látszanak, egy kör és egy egyenes (rombusz esetén két egyenes). A kör a fent látott Apollóniusz-kör, az egyenes pedig a deltoid szimmetriatengelye.*

Ezt a tételt alkalmaztuk feladatunkban a $PHQC$ deltoidra: mivel $PAC\sphericalangle = HAQ\sphericalangle$, ezért $AP/AQ = HP/HQ$, készen vagyunk. Ugyanakkor a tétel használatával pl. Lapunk **B. 4448.** feladata (2012. április) is könnyen adódik – ezt Olvasónkra bízzuk, hogyan.