Maga Balázs megoldása. Be fogjuk bizonyítani, hogy amennyiben $i^2 < n \le (i+1)^2$, ahol i pozitív egész, akkor $k = i$.

Ennek igazolásához két dolgot kell tennünk. Egyrészt bizonyítanunk kell, hogy minden lehetséges békés elrendezés esetén marad szabadon $i \times i$-s négyzet. Másrészt meg kell mutatnunk, hogy létezik a bástyáknak olyan békés elrendezése, ami esetén nem marad szabadon ennél nagyobb négyzet. Ezen lépéseket ebben a sorrendben tesszük meg.

I. Számozzuk meg az oszlopokat 1-től n-ig balról jobbra, a sorokat szintén lentről felfelé. Ekkor lesz olyan bástya, ami az 1. oszlopban van. Legyen ennek sorszáma s_1, ekkor ezen bástya koordinátái $(1, s_1)$. Tekintsünk most úgy i darab szomszédos sort, hogy az s_1 sor köztük van. Mivel $n > i^2 \ge i$, ez lehetséges. Ezen i sorban még további $i-1$ bástya található $(1, s_1)$-n kívül, mivel békés elrendezésben minden sorban pontosan egy bástya van. Indirekte tegyük fel, hogy ebben az i darab sorban nem marad szabadon $i \times i$-s négyzet. Ez azt jelenti, hogy bármely szomszédos i oszlopba kerül bástya ezen az i darab soron. Azaz ha tekintjük ezen bástyák oszlopszámát növekvő sorrendben (ezeket jelölje $1 = o_1 < o_2 < \ldots < o_i$), akkor tetszőleges $j \in 1, 2, \ldots, i-1$ esetén $o_{j+1} - o_j \le i$. Ebből adódik, hogy $o_i \le o_1 + i \cdot (i-1) = i^2 - i + 1$. Mivel viszont $n > i^2$, $n \ge i^2 + 1$, ezen o_i sorszámú oszlop után még legalább i darab oszlopban nincs bástya ezen az i darab soron. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy szabadon marad egy $i \times i$-s négyzet. Ez ellentmondás, tehát valóban mindig marad szabadon $i \times i$-s négyzet.

II. Itt elegendő egy konstrukciót létrehoznunk, aminél nem marad szabadon $(i+1) \times (i+1)$-s négyzet. Helyezzük el bástyáinkat a következő módon: az 1. sorban levő bástya legyen az $(1, 1)$ mezőn. A második sorban levő legyen az $(i+2, 1+1)$ mezőn. És így tovább, amint egy sorral feljebb lépünk, mindig $i+1$ oszloppal lépjünk jobbra, amíg ez lehetséges, azaz amíg az így kapott oszlopszám nem lépi túl az n-t. Ha viszont túllépi, válasszuk a legkisebb üres sor- és oszlopszámokkal rendelkező mezőt, azaz a $(2, s_2)$-t. Innen indulva megint a fenti algoritmust követjük: 1 sorral feljebb, $i+1$ oszloppal jobbra, amíg ez lehetséges. Ha nem, a $(3, s_3)$ mezőt választjuk. Ezt az algoritmust folytatva pakoljuk fel a bástyákat, míg a sorszám el nem éri az n-t. Azt állítom, hogy az így kapott elrendezésben nem marad szabadon $(i+1) \times (i+1)$-s négyzet, azaz ez az elrendezés megfelel számunkra.

Először azt kell meggondolnunk, hogy egyáltalán békés elrendezéshez jutottunk-e, azaz igaz-e, hogy minden sorban és oszlopban pontosan 1 bástya van. Mivel n bástyát helyeztünk el, ez ekvivalens azzal, hogy egyik sorban vagy oszlopban sincs 1-nél több bástya. A sorokra ez nyilvánvaló, mivel a bástyák elhelyezése során egyesével lépdeltünk fel rajtuk. Egy oszlopban pedig azért nem lehet két bábu, mert először az $i+1$-gyel 1 maradékot adó oszlopokon mentünk végig 1-től indulva n-ig, aztán a 2 maradékot adókon stb. Így a bástyák elhelyezése során maradékosztályonként soroltuk fel a számokat 1-től n-ig. Ekkor világos, hogy ugyanabba a maradékosztályba nem kezdhettünk bele kétszer, hiszen akkor már n-nél több bástyát kellett volna elhelyeznünk. Tehát valóban békés az elrendezésünk.

Tehát már csak azzal kell foglalkoznunk, hogy nem maradhatott $(i+1) \times (i+1)$-s négyzet szabadon. Ez ekvivalens azzal, hogy tetszőleges módon választva $i+1$ szomszédos sort, nincs úgy $i+1$ szomszédos oszlop, hogy mindegyik üres lenne ezen $i+1$ soron belül. Ezt fogjuk tehát bizonyítani.

Először nézzük azt az esetet, amikor van olyan $i+1$-es maradékosztály, amit teljes egészében tartalmaz a kiválasztott $i+1$ darab sorunk, azaz a megjelenő oszlopszámok között ott van az összes 1 és n közötti szám, ami $i+1$-gyel osztva egy adott m maradékot ad. Ekkor nyilván nincs olyan $i+1$ szomszédos oszlop, ami üres lenne ezen az $i+1$ soron, mivel tetszőleges $i+1$ szomszédos oszlop között van olyan, melynek sorszáma m maradékot ad $i+1$-gyel osztva. Ezzel az esettel tehát készen vagyunk.

Tehát már csak azzal az esettel kell foglalkoznunk, amikor nincs olyan maradékosztály, ami teljes egészében fel lenne sorolva ebben az $i+1$ sorban. Ekkor tehát legalább 2 maradékosztály elemei jelennek meg, mint oszlopszámok. Másrészt mivel csak akkor váltunk maradékosztályt, ha az aktuálisat már teljes egészében felsoroltuk, nem lehetséges, hogy legalább 3 maradékosztály elemei jelenjenek meg, mint oszlopszámok, hiszen ekkor a nem szélsők összes 1 és n közötti reprezentánsa megjelenik az oszlopszámok között, márpedig azt ebben az esetben kizártuk.

Tehát valójában most már csak azzal foglalkozunk, amikor az $i+1$ szomszédos sorból álló blokkunk pontosan 2 maradékosztályból tartalmaz oszlopszámot. Legyenek ezek m és $m+1$. Ekkor $m \ne 0$, mivel a maradékosztályokat 1-től indulva soroljuk fel, így ez a maradékosztály az utolsó.

$m+1$ viszont lehet 0, ekkor rendhagyó módon $i+1$-es maradéknak tekintjük mod $i+1$ az egyszerűség kedvéért. Ekkor az oszlopszámok a konstrukció megalkotási algoritmusa alapján lentről felfelé haladva: $a(i+1)+m$, $(a+1)(i+1)+m$, $\ldots$, $(a+a_1)(i+1)+m$, $m+1$, $(i+1)+m+1$, $\ldots$, $b \cdot (i+1)+m+1$. Ekkor $b \ge a-1$. Indirekte tegyük fel, hogy nincs így. Az imént $i+1$ sort vettünk fel, így a fent megjelenő $i+1$ együtthatók (a, $a+1$, $\ldots$, $a+a_1$, 0, 1, $\ldots$, b) száma $i+1$. $b < a-1$ esetén ezek mind eltérőek, továbbá $b+1$ is eltér mindtől. Így a $0 \cdot (i+1)$, $1 \cdot (i+1)$, $\ldots$, $b \cdot (i+1)$, $(b+1) \cdot (i+1)$, $a \cdot (i+1)$, $(a+1) \cdot (i+1)$, $\ldots$, $(a+a_1) \cdot (i+1)$ számok mind eltérőek, valamint mindegyik legalább 0 és kisebb, mint n, mivel a legnagyobb közülük $(a+a_1) \cdot (i+1)$, s még $(a+a_1) \cdot (i+1) + m \le n$ is igaz.

Tehát a nemnegatív, n-nél kisebb $i+1$ többszörösök száma legalább $i+2$. Másrészt $n \le (i+1)^2$ miatt a legnagyobb ilyen többszörös az $i \cdot (i+1)$, a legkisebb pedig a $0 \cdot (i+1)$, azaz az ilyen többszörösök száma valójában $i+1$. Ez ellentmondás, tehát valóban $b \ge a-1$. Ugyanakkor $b < a + a_1$. Ellenkező esetben ugyanis $n \ge b \cdot (i+1) + m + 1 > (a+a_1) \cdot (i+1) + m$. Ez utóbbi itt a legnagyobb n-nél nemnagyobb, $i+1$-gyel osztva m maradékot adó szám. Így nyilván $b \cdot (i+1) + m + 1$ a legnagyobb n-nél nemnagyobb $i+1$-gyel osztva $m+1$ maradékot adó szám. Ez viszont azt jelenti, hogy az $m+1$-es maradékosztály összes n-nél nemnagyobb pozitív reprezentánsa megjelenik ebben az $i+1$ sorban, mint oszlopszám, ami ellentmond az esetünk kiinduló feltételével. Tehát $a-1 \le b < a + a_1$, azaz $a \le b+1 \le a + a_1$. Tehát $(b+1) \cdot (i+1) + m$ az itt megjelenő oszlopszámok között van. Ebből viszont már rövid úton következik, hogy nem maradhat üresen $i+1$ szomszédos oszlop ebben az $i+1$ sorban.

Először is a legkisebb oszlopszám $m+1 \leq i+1$, így az első $i+1$ oszlop biztosan nem üres. Utána $b \cdot (i+1)+m+1$-ig végig legfeljebb $i+1$ a különbség a szomszédos sorszámok között, nincs gond, továbbra sem maradhat üresen $i+1$ szomszédos oszlop. Ezt követően nem maradhat üresen $i+1$ oszlop, hiszen $(b+1) \cdot (i+1)+m-b \cdot (i+1)+(m+1) = i-1$ két oszlopszám különbsége. Innen viszont $(a+a_1) \cdot (i+1)+m$-ig ismét végig $i+1$ a különbség az oszlopszámok között, mint az imént, azaz most sem maradhat üresen $i+1$ szomszédos oszlop. Ezen iménti oszlop pedig nem lehet $i+1$-nél távolabb a tábla szélétől, mivel ez a legnagyobb n-nél nemnagyobb reprezentánsa egy $i+1$-es maradékosztálynak. Azaz akárhogy választunk ki $i+1$ szomszédos sort, nem lesz bennük $i+1$ szomszédos üres oszlop. Tehát a konstrukciónk valóban megfelel az elvárásainknak. Ezzel készen vagyunk, valóban minden $n \geq 2$ esetén, ha $i^2 < n \leq (i+1)^2$, akkor $k = i$.