Homonnay Bálint megoldása. Tegyük fel, hogy egy n-re

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \le a_{n+1}.$$

Szorozva n-nel, hozzáadva a_{n+1}-et és osztva $n+1$-gyel azt kapjuk, hogy

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} \le a_{n+1},$$

tehát ha n-re igaz az állítás, akkor $n+1$-re nem lehet az. Mivel a sorozat szigorúan monoton nő, ezért semmilyen n-nél nagyobb számra nem lehet igaz, tehát legfeljebb egy számra lehet igaz az állítás.

Mivel $a_1 < \frac{a_0 + a_1}{1}$, csak akkor nem lehet megoldás, ha minden n-re

$$\frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} > a_{n+1}.$$

Indukcióval belátjuk, hogy ha nincs megoldás, akkor minden i-re

$$a_{i+1} < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_i}{i} \quad \text{és} \quad a_i < a_0 + a_1.$$

Szorozva, majd használva az indukciós feltevést és a sorozat monotonitását:

$$i \cdot a_{i+1} < a_0 + a_1 + \ldots + a_i < a_0 + a_1 + (i-1)(a_0 + a_1) = i(a_0 + a_1), \quad a_{i+1} < a_0 + a_1,$$

illetve i-vel szorozva és a_{i+1}-et hozzáadva

$$(i+1)a_{i+1} < a_0 + a_1 + \ldots + a_{i+1}, \quad \text{azaz} \quad a_{i+1} < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{i+1}}{i+1};$$

ha nincs megoldás, ekkor ebből valóban $a_{i+2} < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{i+1}}{i+1}$ következik. Mivel a sorozat szigorúan monoton növekszik, $i = a_0 + a_1 + 1$-re ez az állítás nem lehet igaz, tehát mindig van megoldás, és feljebb már igazoltuk, hogy ez egyértelmű.