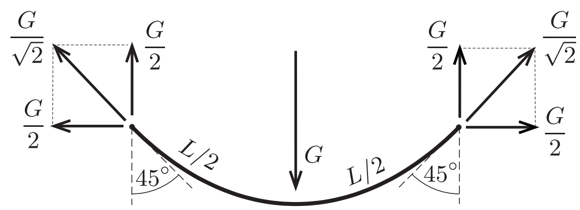
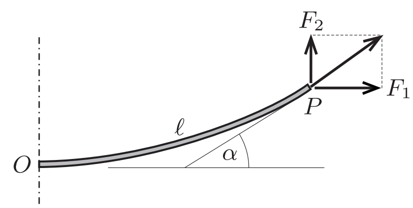
Megoldás. Jelöljük a lánc teljes hosszát L-lel, teljes súlyát G-vel. A lánc két végén ható erők függőleges komponense $G/2$, a vízszintes komponensük pedig (a 45°-os szögek miatt) $\pm(G/2)$ (*1. ábra*).



1. ábra

Tekintsük a láncnak egy olyan P pontját, amely pont és a legmélyebb O pont közötti láncdarab hossza ℓ (*2. ábra*). Ennek a láncdarabnak a súlya arányos ℓ-lel, és mivel $\ell = L/2$ esetén a súly $G/2$, általános esetben

$$G(\ell) = \frac{G}{L}\ell.$$



2. ábra

A P pontban ható (a lánc többi része által kifejtett) erő vízszintes komponense mindenhol ugyanakkora (hiszen a láncdarabra nem hat vízszintes irányú külső erő):

$$F_1 = \text{állandó} = \frac{G}{2},$$

a függőleges komponens pedig a láncdarab súlya:

$$F_2(\ell) = \frac{G}{L}\ell.$$

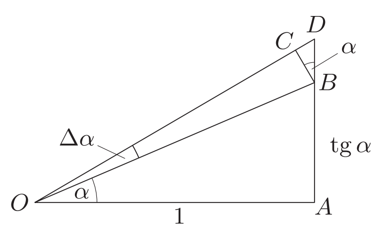
Ezek ismeretében ki tudjuk számítani a lánc meredekségét a P pontban:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_2}{F_1} = \frac{2}{L}\ell. \tag{1}$$

Mennyit változik ez a meredekség, ha P-ből egy kicsiny $\Delta\ell$-lel hosszabb láncdarab P' végpontjába „megyünk át”? A *3. ábráról* leolvashatjuk, hogy kicsiny $\Delta\alpha$ esetén

$$\Delta(\operatorname{tg}\alpha) = BD \approx BC\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\Delta\alpha = \left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)\Delta\alpha. \tag{2}$$

(A képlet csak közelítőleg, kicsiny $\Delta\alpha$-ra igaz, mert az OD-re merőleges BC szakasz hosszát egy kicsiny körív hosszával helyettesítettük.)



3. ábra

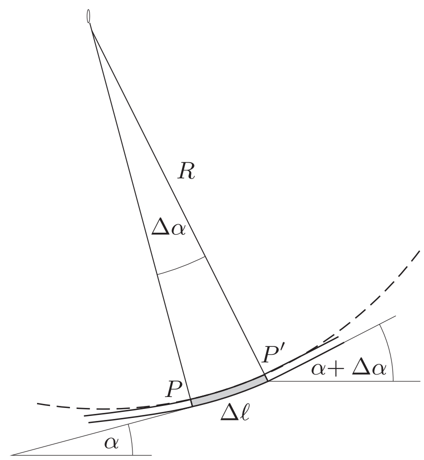
Megjegyzés. A fenti összefüggés a differenciálszámítás formuláiból is megkapható:

$$\frac{\mathrm{d}(\operatorname{tg}\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Az (1) és (2) összefüggésekből azt kapjuk, hogy

$$(1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha)\Delta\alpha = \frac{2}{L} \cdot \Delta\ell = \frac{2}{L} \cdot R\Delta\alpha. \tag{3}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\Delta\ell = R\Delta\alpha$, ahol R a lánc görbületi sugara (a simulókörének sugara) a kérdéses pontban (lásd a *4. ábrát*).



4. ábra

A (3) összefüggésből (2) felhasználásával megkaphatjuk a lánc görbületi sugarát a lánc tetszőleges pontjában:

$$R(\ell) = \frac{L}{2} + \frac{2\ell^2}{L},$$

és így a kérdéses speciális helyeken is.

a) A lánc legalsó pontjában

$$R(\ell = 0) = \frac{L}{2} = 20 \text{ cm},$$

b) a felfüggesztési pontokban pedig

$$R\left(\ell = \frac{1}{2}L\right) = L = 40 \text{ cm}.$$