A rész. Az üzemanyagrúd

A.1. A magreakció során felszabaduló energiát a tömegdefektusból számolhatjuk:

$$\Delta E = \left[m\left({}^{235}\mathrm{U}\right) + m\left({}^{1}\mathrm{n}\right) - m\left({}^{94}\mathrm{Zr}\right) - m\left({}^{140}\mathrm{Ce}\right) - 2m\left({}^{1}\mathrm{n}\right)\right] c^2.$$

Összevonás után, a tömegek felhasználásával kapjuk:

$$\Delta E = \left[m\left({}^{235}\mathrm{U}\right) - m\left({}^{94}\mathrm{Zr}\right) - m\left({}^{140}\mathrm{Ce}\right) - m\left({}^{1}\mathrm{n}\right)\right] c^2 = 208{,}7\ \mathrm{MeV}.$$

A.2. Az U_2O (feladatban megadott) sűrűsége a térfogategységre eső molekulák össztömegét jelenti, így ezt elosztva a moláris tömeggel, majd megszorozva az N_A Avogadro-állandóval, megkapjuk az 1 m^3-nyi anyagban található U_2O-molekulák N_1 számát:

$$N_1 = \frac{\varrho N_\mathrm{A}}{M} = 2{,}364 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

Az urán-dioxid molekuláknak azonban csak 0,72%-a tartalmazza a 235-ös uránizotópot, így a feladat kérdésére a válasz:

$$N = 0{,}0072 \cdot N_1 = 1{,}702 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

A.3. Az üzemanyagrúd egységnyi térfogatában N hasadó uránatom van, ezek teljes hatáskeresztmetszete $N\sigma_f$. Ha ezt megszorozzuk a φ neutronfluxussal, az időegység alatt (köbméterenként) bekövetkező hasadások számát kapjuk: $\varphi N \sigma_f$. Minden magreakcióban az A.1. részben kiszámolt ΔE energia szabadul fel, melynek 80%-a alakul hővé, így a hőfejlődés Q üteme:

$$Q = 0{,}8\,\varphi N \sigma_f \Delta E = 4{,}92 \cdot 10^8\ \mathrm{W/m^3}.$$

A.4. A $T_\mathrm{c} - T_\mathrm{s}$ hőmérsékletkülönbség K dimenziójú, így az $F(Q, a, \lambda)$ mennyiség mértékegysége is kelvin kell hogy legyen. Keressük az ismeretlen függvényt $F(Q, a, \lambda) = Q^\alpha a^\beta \lambda^\gamma$ alakban, és vizsgáljuk meg, mekkorának kell választanunk az α, β, γ számokat, hogy kelvin dimenziójú mennyiséget kapjunk. A jobb oldalon szereplő mennyiségek mértékegysége:

$$[Q] = \mathrm{W\ m^{-3}} = \mathrm{kg\ s^{-3}\ m^{-1}}, \quad [a] = \mathrm{m}, \quad [\lambda] = \mathrm{W\ m^{-1}\ K^{-1}} = \mathrm{kg\ s^{-3}\ m\ K^{-1}}.$$

Ezek felhasználásával az alábbi egyenletet kapjuk a kitevőkre:

$$\mathrm{K} = \left(\mathrm{kg\ s^{-3}\ m^{-1}}\right)^\alpha \mathrm{m}^\beta \left(\mathrm{kg\ s^{-3}\ m\ K^{-1}}\right)^\gamma,$$

amiből $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$ adódik. Tehát az üzemanyagrúd közepének és felületének hőmérsékletkülönbségét megadó formula (a feladatban megadott 1/4-es faktort is visszaírva)[2]:

$$T_\mathrm{c} - T_\mathrm{s} = \frac{Qa^2}{4\lambda}.$$

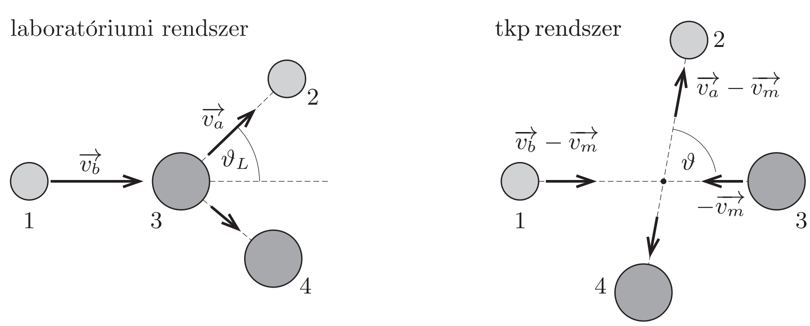
A.5. Az üzemanyagrúd közepének a hőmérséklete nem érheti el az U_2O olvadási hőmérsékletét, míg a külső felületének hőmérséklete a hűtőközeg hőmérsékletével egyezik meg. Így az A.4. részfeladatban kapott összefüggés szerint az üzemanyagrúd sugarának lehetséges legnagyobb a_u értéke

$$a_\mathrm{u} = \sqrt{\frac{4\lambda(T_\mathrm{c} - T_\mathrm{s})}{Q}},$$

ahol most $T_\mathrm{c} = T_\mathrm{olv} = 3138$ K, $T_\mathrm{s} = 577$ K. A megadott adatokat és Q fentebb kiszámolt értékét behelyettesítve $a_\mathrm{u} = 8{,}27 \cdot 10^{-3}$ m.

B rész. A moderátor

B.1. Az *ábrán* láthatóak a sebességviszonyok a tömegközépponti koordináta-rendszerben. Fontos megjegyezni, hogy a ϑ szög nagyobb, mint ϑ_L.



[2]A dimenzióanalízis módszere egy dimenziótlan szorzótényező erejéig határozatlanul hagyja a megoldást. A helyzetet az tette volna egyértelművé, ha a feladat szövegében megadják, hogy a fizikai mennyiségek hatványainak szorzata előtt álló állandó számértéke éppen 1/4 (– a szerk.).

B.2. A tömegközéppont sebessége a rendszer impulzusának és a teljes tömegének hányadosa:

$$v_m = \frac{v_b}{A+1}.$$

Ugyanekkora sebességgel mozog a tkp rendszerből nézve a laboratóriumi rendszerben kezdetben álló moderátoratom is:

$$V = \frac{v_b}{A+1}.$$

A neutron sebességének nagysága az ütközés előtt a tkp rendszerben:

$$v = v_b - v_m = \frac{A}{A+1} v_b.$$

A tkp rendszerben a rugalmas ütközés során az energia- és impulzusmegmaradás úgy teljesül, hogy a neutron és a moderátoratom is megőrzi az ütközés előtti sebességének nagyságát (rendre v és V), csupán a sebesség iránya változik meg.

B.3. Ütközés után a neutron sebességvektora a laboratóriumi rendszerben $\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_m}$, így a sebességnégyzetének nagysága (a vektorháromszögben felírható koszinusztételből):

$$v_a^2 = v^2 + v_m^2 + 2vv_m \cos\vartheta.$$

Behelyettesítve v és v_m előző részfeladatban kiszámolt értékét:

$$v_a^2 = \frac{A^2 v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{v_b^2}{(A+1)^2} + \frac{2Av_b^2}{(A+1)^2}\cos\vartheta,$$

amiből

$$G(\alpha,\vartheta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{A^2 + 2A\cos\vartheta + 1}{(A+1)^2}.$$

Ez kis átalakítással felírható α segítségével is:

$$G(\alpha,\vartheta) = \frac{A^2+1}{(A+1)^2} + \frac{2A}{(A+1)^2}\cos\vartheta = \frac{1}{2}\left[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\vartheta\right].$$

B.4. Az energiaveszteség akkor a legnagyobb, ha a $G(\alpha,\vartheta)$ mennyiség a lehető legkisebb. Ez (akár intuícióval, akár az előző részben kapott kifejezést vizsgálva) akkor következik be, ha $\vartheta = 180° = \pi$, azaz ha az ütközés lineáris. Ekkor $G(\alpha,\pi) = \alpha$, a legnagyobb relatív energiaveszteség pedig

$$f_l = \left(\frac{E_b - E_a}{E_b}\right)_{\max} = 1 - G(\alpha,\pi) = 1 - \alpha.$$

Most $\alpha = (19/21)^2$, így $f_l \approx 0{,}181$.

C rész. A nukleáris reaktor

C.1. A reaktor térfogata adott: $V = \pi R^2 H$. Kérdés, hogyan kell megválasztani az $R:H$ arányt, hogy az elszökő neutronfluxusban szereplő

$$x = \left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

kifejezés minimális legyen. Fejezzük ki R^2 értékét a térfogattal:

$$x = \frac{2{,}405^2 \pi H}{V} + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2.$$

Bontsuk az első tagot két egyenlő kifejezés összegére, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenséget:

$$x = \frac{2{,}405^2\pi H}{2V} + \frac{2{,}405^2\pi H}{2V} + \frac{\pi^2}{H^2} \geq \sqrt[3]{\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}\cdot\frac{2{,}405^2\pi H}{2V}\cdot\frac{\pi^2}{H^2}}.$$

A jobb oldalon láthatóan kiesik H, így egy konstans értéket kapunk. Ezt a bal oldali kifejezés akkor veszi fel, ha a benne szereplő három tag értéke megegyezik, azaz

$$\frac{2{,}405^2}{2R^2} = \frac{\pi^2}{H^2}, \quad \text{valamint} \quad x = \frac{3\pi^2}{H^2}.$$

Használjuk még fel, hogy stacionárius állapotban az időegység alatt kiszökő és a láncreakcióban termelődő (többlet)neutronok száma megegyezik, vagyis $k_1 x\psi = k_2\psi$, amiből

$$H = \sqrt{\frac{3\pi^2}{x}} = \sqrt{\frac{3\pi^2 k_1}{k_2}} \approx 5{,}87 \text{ m}, \quad \text{és} \quad R = \frac{2{,}405H}{\sqrt{2}\pi} \approx 3{,}175 \text{ m}.$$

C.2. A $d = 0{,}287$ m oldalélű négyzetrácsba rendezett üzemanyag-kazetták mindegyikére d^2 nagyságú keresztmetszet-terület jut a reaktorban. Mivel a reaktor teljes keresztmetszete πR^2 (ahol R az előző feladatrészben meghatározott érték), így a reaktorban elférő kazetták száma legfeljebb

$$F_n = \frac{\pi R^2}{d^2} \approx 387.$$

Egyetlen (henger alakú) fűtőkazetta térfogata $\pi r_{\text{kazetta}} H$ (ahol $r_{\text{kazetta}} = 3{,}617 \cdot 10^{-2}$ m), sűrűsége adott ($\varrho = 1{,}060$ kg m^{-3}), így a fűtőelemek össztömege

$$M = F_n \pi r_{\text{kazetta}} H \varrho \approx 9{,}90 \cdot 10^4 \text{ kg}.$$