A rész. Szélsőértékelv a mechanikában

A.1. A mechanikai energia megmaradása alapján:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_0, \quad \text{amiből} \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2V_0}{m}}.$$

A.2. A határfelületen csak az x irányú sebességkomponens változik (a határfelületen fellépő $-x$ irányú erőlökés hatására), az y irányú nem. Ezért

$$v_{1y} = v_{2y},$$
$$v_1 \sin\vartheta_1 = v_2 \sin\vartheta_2.$$

A.3. A hatás definíciójának megfelelően $A(w)$ az O és P rögzített pontok között:

$$A(w) = mv_1\sqrt{x_1^2 + w^2} + mv_2\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0^2 - w^2)}.$$

Az $A(w)$ hatás akkor lesz minimális, ha w szerinti deriváltja nulla:

$$\frac{v_1 w}{\sqrt{x_1^2 + w^2}} - \frac{v_2(y_0 - w)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - w)^2}} = 0,$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{(y_0 - w)\sqrt{x_1^2 + w^2}}{w\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - w)^2}}.$$

Vegyük észre, hogy ez ugyanaz, mint az A.2.-ben megkapott $v_1 \sin\vartheta_1 = v_2 \sin\vartheta_2$ eredmény!

B rész. Szélsőértékelv az optikában

B.1. A fény sebessége az I-es közegben c/n_1, a II-es közegben c/n_2, ahol c a fénysebesség vákuumban. Legyen a két közeget elválasztó egyenes egyenlete $y = y_0$, a fénysugár pedig az $x = w$ helyen lépjen át egyik közegből a másikba. Az a $\tau(w)$ idő, amíg a fény a $(0;0)$ origóból a rögzített $(x_0; y_0)$ pontba jut:

$$\tau(w) = \frac{n_1}{c}\sqrt{y_1^2 + w^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x_0 - w)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

A szélsőértéket A.3.-hoz hasonlóan deriválással határozhatjuk meg:

$$\frac{n_1 w}{\sqrt{y_1^2 + w^2}} - \frac{n_2(y_0 - w)}{\sqrt{(x_0 - w)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = 0,$$
$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2.$$

Ez a Snellius–Descartes-törvény.

B.2. A Snellius–Descartes-törvény alapján $n_0 \sin\alpha_0 = n(y)\sin\alpha$. Ezen kívül felhasználva, hogy $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}\alpha$ és $\sin\alpha = 1/\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$:

$$n_0 \sin\alpha_0 = \frac{n(y)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0 \sin\alpha_0}\right)^2 - 1}.$$

B.3. A B.2. eredményből a változókat szétválasztva és mindkét oldalt integrálva:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}} = -\int \mathrm{d}x.$$

(Felhasználtuk, hogy $\alpha_0 = 90^\circ$ és így $\sin\alpha_0 = 1$.) Használjuk a $\xi = (n_0 - ky)/n_0$ helyettesítést, így:

$$\int \frac{\mathrm{d}\xi\left(-\frac{n_0}{k}\right)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = -\int \mathrm{d}x, \qquad -\frac{n_0}{k}\ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right) = -x + c.$$

Figyelembe véve az $x = 0$ és $y = 0$ kezdeti feltételeket $c = 0$. Ebből a pálya egyenlete:

$$x = \frac{n_0}{k}\ln\left[\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right) + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right].$$

B.4. Felhasználva a megadott adatokat ($y_0 = 10{,}0$ cm, $n_0 = 1{,}50$, $k = 0{,}050\ \mathrm{cm}^{-1}$) a B.3. végeredményébe behelyettesítve ($y = -y_0$):

$$x_0 = \frac{n_0}{k} \ln \left[\left(\frac{n_0 + ky_0}{n_0} \right) + \sqrt{\left(\frac{n_0 + ky_0}{n_0} \right)^2 - 1} \right] = 24{,}0 \text{ cm.}$$

C rész. A szélsőértékelv és az anyag hullámtermészete

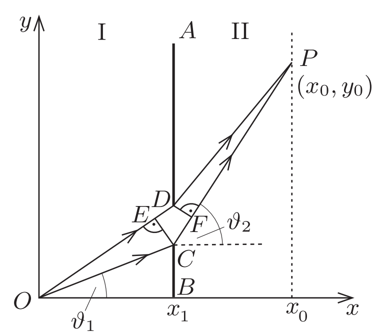
C.1. A részecske de Broglie-hullámhossza $\lambda = \dfrac{h}{mv}$, amiből a keresett fáziskülönbség (a hatás $\Delta A = mv\Delta s$ definícióját felhasználva):

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{h} mv\Delta s = \frac{2\pi\Delta A}{h}.$$

C.2. Tanulmányozzuk az OCP és ODP pályákat! A geometriai útkülönbség az I-es tartományban ED, a II-es tartományban CF. Ebből $d \ll x_0 - x_1$ és $d \ll x_1$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{CD} &= \frac{2\pi d \sin\vartheta_1}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin\vartheta_2}{\lambda_2} = \\ &= \frac{2\pi m v_1 d \sin\vartheta_1}{h} - \frac{2\pi m v_2 d \sin\vartheta_2}{h} = \\ &= 2\pi \frac{md}{h} (v_1 \sin\vartheta_1 - v_2 \sin\vartheta_2) = 0\end{aligned}$$

(A.2. vagy B.1. alapján). Ez az eredmény várható, hiszen a klasszikus pálya közelében erősítésnek kell lennie.



D rész. Anyaghullámok interferenciája

D.1. Az energiák alapján

$$qU_1 = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{amiből} \quad U_1 = \frac{mv^2}{2q} = 1{,}139 \cdot 10^3 \text{ V.}$$

D.2. A fáziskülönbség P-ben:

$$\Delta\varphi_{\mathrm{P}} = \frac{2\pi d \sin\vartheta}{\lambda_1} - \frac{2\pi d \sin\vartheta}{\lambda_2} = 2\pi(v_1 - v_2)\frac{md}{h} \sin\vartheta = 2\pi\beta,$$

amiből

$$\beta = 5{,}13.$$

D.3. Az előző rész alapján látható, hogy a legközelebbi olyan helyen, ahol nem várható elektronbecsapódás (kioltás van) $\Delta\varphi = 5{,}5 \cdot 2\pi$. Ez alapján:

$$\frac{mv_1 d \sin\vartheta}{h} - \frac{mv_2 d \sin(\vartheta + \Delta\vartheta)}{h} = 5{,}5;$$

$$\sin(\vartheta + \Delta\vartheta) = \frac{\frac{mv_1 d \sin\vartheta}{h} - 5{,}5}{\frac{mv_2 d}{h}} = \frac{v_1}{v_2}\sin\vartheta - \frac{5{,}5\, h}{mv_2 d} = 0{,}173\,586,$$

$$\Delta\vartheta = -0{,}0036°,$$

amiből a P-hez legközelebbi hely távolsága:

$$\Delta y = (x_0 - x_1)\big[\operatorname{tg}(\vartheta + \Delta\vartheta) - \operatorname{tg}\vartheta\big] = -16{,}2\ \mu\text{m}.$$

A negatív előjel azt mutatja, hogy ez a pont P alatt van.

D.4. Az I fluxussűrűség az elektronok v sebességének és N/V sűrűségének szorzata. Ez alapján:

$$N = \frac{I_{\min} V}{v} = 1, \quad \text{amiből} \quad I_{\min} = \frac{v}{V} = \frac{v}{A\,l} = 4 \cdot 10^{19}\ \mathrm{m^{-2}s^{-1}}.$$