A rész. A Naptól jövő sugárzás

A.1. A Stefan–Boltzmann-törvény alapján: $L_\odot = \left(4\pi R_\odot^2\right)\left(\sigma T_\odot^4\right)$. Innen:

$$T_\odot = \left(\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma}\right)^{1/4} = 5{,}76 \cdot 10^3\ \mathrm{K}.$$

A.2.

$$P_{\mathrm{be}} = \int_0^\infty u(f)\,\mathrm{d}f = \int_0^\infty A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\,\frac{2\pi h}{c^2} f^3 \exp\left(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot\right)\,\mathrm{d}f.$$

Legyen $x = \dfrac{hf}{k_{\mathrm{B}}T_\odot}$. Ekkor $f = \dfrac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}x$ és $\mathrm{d}f = \dfrac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}\,\mathrm{d}x$. Ezzel:

$$P_{\mathrm{be}} = \frac{2\pi h A R_\odot^2}{c^2 d_\odot^2}\,\frac{(k_{\mathrm{B}}T_\odot)^4}{h^4}\int_0^\infty x^3 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\cdot 6 = \frac{12\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}.$$

Másik megoldás, amely *nem* használja a Wien-közelítést:

$$P_{\mathrm{be}} = \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2}A = \sigma T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2} = \frac{2\pi^5 k_{\mathrm{B}}^4}{15c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}.$$

A.3.

$$n_\gamma(f) = \frac{u(f)}{hf} = A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}f^2\exp(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot).$$

A.4. A hasznos kimenő teljesítményt az $E_{\mathrm{g}} = hf_{\mathrm{g}}$ egy fotonra jutó energiakvantum és az $E \geq E_{\mathrm{g}}$ energiájú fotonok számának szorzata adja:

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{ki}} &= hf_{\mathrm{g}}\int_{f_{\mathrm{g}}}^\infty n_\gamma(f)\,\mathrm{d}f = hf_{\mathrm{g}}A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}\int_{f_{\mathrm{g}}}^\infty f^2\exp(-hf/k_{\mathrm{B}}T_\odot)\,\mathrm{d}f = \\
&= k_{\mathrm{B}}T_\odot x_{\mathrm{g}} A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}\frac{2\pi}{c^2}\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T_\odot}{h}\right)^3\int_{x_{\mathrm{g}}}^\infty x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}T_\odot^4 A\frac{R_\odot^2}{d_\odot^2}x_{\mathrm{g}}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.
\end{aligned}$$

A.5. A hatásfok:

$$\eta = \frac{P_{\mathrm{ki}}}{P_{\mathrm{be}}} = \frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

Ha P_{be}-re az A.2. másik eredményét használjuk, akkor a hatásfok:

$$\eta = \frac{2\pi k_{\mathrm{B}}^4}{c^2h^3}\frac{1}{\sigma}x_{\mathrm{g}}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}} = \left(\frac{90}{\pi^4}\right)\frac{x_{\mathrm{g}}}{6}\left(x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

A két eredmény közel van egymáshoz, mert $90/\pi^4 \approx 0{,}92 \approx 1$.

A.6.

$$\eta = \frac{1}{6}\left(x_{\mathrm{g}}^3 + 2x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}}\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}}.$$

A határokon érvényes értékek: $\eta(0) = 0$ és $\eta(\infty) = 0$.

Mivel a zárójelben levő polinom kizárólag pozitív együtthatókat tartalmaz, az monoton növekvő. Az exponenciális függvény monoton csökkenő, és a szorzatuknak valahol maximuma van.

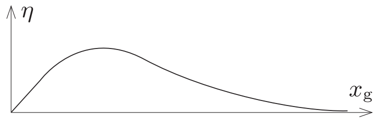
$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}} = \frac{1}{6}\left(-x_{\mathrm{g}}^3 + x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}=0} = \frac{1}{3}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}\to\infty} = 0.$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}} = \frac{15}{\pi^4}\left(-x_{\mathrm{g}}^3 + x_{\mathrm{g}}^2 + 2x_{\mathrm{g}} + 2\right)\mathrm{e}^{-x_{\mathrm{g}}},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}=0} = \frac{30}{\pi^4} \approx 0{,}31, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}\right|_{x_{\mathrm{g}}\to\infty} = 0.$$



A.7. A maximális értéket ott veszi fel a függvény, ahol

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x_\mathrm{g}} = \frac{1}{6}\big(-x_\mathrm{g}^3 + x_\mathrm{g}^2 + 2x_\mathrm{g} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x_\mathrm{g}) \equiv x_\mathrm{g}^3 - x_\mathrm{g}^2 - 2x_\mathrm{g} - 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásához használhatjuk például a felező módszert (más numerikus módszer is elfogadható):

$$\begin{aligned}
p(0) &= -2,\\
p(1) &= -4,\\
p(2) &= -2,\\
p(3) &= 10 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 3,\\
p(2{,}5) &= 2{,}375 \quad \Rightarrow \quad 2 < x_0 < 2{,}5,\\
p(2{,}25) &= -0{,}171 \quad \Rightarrow \quad 2{,}25 < x_0 < 2{,}5.
\end{aligned}$$

A közelítő érték, ahol η-nak maximuma van: $x_0 = 2{,}27$. A maximum: $\eta(2{,}27) = 0{,}457$.

A.8. Az x_g értéke:

$$x_\mathrm{g} = \frac{1{,}11 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 5763} = 2{,}23,$$

amivel a hatásfok:

$$\eta_\mathrm{Si} = \frac{x_\mathrm{g}}{6}\big(x_\mathrm{g}^2 + 2x_\mathrm{g} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}} = 0{,}457.$$

Ha az A.2. másik eredményét használjuk, akkor:

$$\eta_\mathrm{Si} = \frac{15x_\mathrm{g}}{\pi^4}\big(x_\mathrm{g}^2 + 2x_\mathrm{g} + 2\big)\mathrm{e}^{-x_\mathrm{g}} = 0{,}422.$$

A.9. A Nap teljes gravitációs potenciális energiája:

$$\Omega = -\int_0^{M_\odot} \frac{Gm\,\mathrm{d}m}{r}.$$

Az egyenletes tömegeloszlás miatt:

$$\varrho = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}, \qquad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho, \qquad \mathrm{d}m = 4\pi r^2 \varrho\,\mathrm{d}r.$$

Ezzel:

$$\Omega = -\int_0^{R_\odot} G\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho\right)\big(4\pi r^2 \varrho\big)\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{16\pi^2 G\varrho^2}{3}\frac{R_\odot^5}{5} = -\frac{3}{5}\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}.$$

A.10.

$$\tau_\mathrm{KH} = \frac{-\Omega}{L_\odot} = \frac{3GM_\odot^2}{5R_\odot L_\odot} = 1{,}88 \cdot 10^7 \text{ év}.$$

B rész. A Napból jövő neutrínók

B.1. ΔE energia felszabadulása során két neutrínó keletkezik, így

$$\Phi_\nu = 2 \cdot \frac{L_\odot}{4\pi d_\odot^2 \Delta E} = 2 \cdot \frac{3{,}85 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \big(1{,}50 \cdot 10^{11}\big)^2 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-12}} = 6{,}8 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-2}.$$

B.2. Legyen ε a neutrínó detektálásának hatásfoka, N_0 a bejövő részecskeszám. Ezzel:

$$\begin{aligned}
N_1 &= \varepsilon N_0,\\
N_\mathrm{e} &= \varepsilon N_0 (1-r),\\
N_\mathrm{x} &= \varepsilon N_0 r/6,\\
N_2 &= N_\mathrm{e} + N_\mathrm{x}.
\end{aligned}$$

Tehát:

$$(1-r)N_1 + \frac{r}{6}N_1 = N_2,$$

innen a kérdezett hányados:

$$r = \frac{6}{5}\left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

B.3. Amikor egy elektron már éppen nem bocsát ki Cserenkov-sugárzást, a sebessége $v_{\text{stop}} = c/n$-re csökken. Az elektron teljes energiája ekkor:

$$E_{\text{stop}} = \frac{m_{\text{e}}c^2}{\sqrt{1 - v_{\text{stop}}^2/c^2}} = \frac{nm_{\text{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Abban a pillanatban, miután a neutrínó kiütötte az elektront, az elektron energiája:

$$E_{\text{start}} = \alpha\Delta t + \frac{nm_{\text{e}}c^2}{\sqrt{n^2-1}}.$$

A kölcsönhatás előtt az elektron energiája $m_{\text{e}}c^2$. Így a neutrínónak átadott energia:

$$E_{\text{átadott}} = E_{\text{start}} - m_{\text{e}}c^2 = \alpha\Delta t + \left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right)m_{\text{e}}c^2.$$

B.4. A ^{7}Be atommagok mozgása miatt Doppler-effektus lép fel a neutrínókra. Mivel az energia relatív megváltozása kicsiny ($\Delta E_{\text{rms}}/E_\nu \sim 10^{-4}$), a nemrelativisztikus Doppler-eltolódással lehet számolni (a relativisztikus számolás szinte azonos eredményt ad). A megfigyelés irányának a z irányt véve:

$$\frac{\Delta E_{\text{rms}}}{E_\nu} = \frac{v_{z,\text{rms}}}{c} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}V_{\text{Be}}}{c} = 3{,}85 \cdot 10^{-4}.$$

Tehát a Be atommagok sebességének négyzetes középértéke:

$$V_{\text{Be}} = \sqrt{3} \cdot 3{,}85 \cdot 10^{-4} \cdot 3{,}00 \cdot 10^8\ \text{ms}^{-1} = 2{,}01 \cdot 10^5\ \text{ms}^{-1}.$$

A Nap magjának átlagos hőmérséklete pedig:

$$\frac{1}{2}m_{\text{Be}}V_{\text{Be}}^2 = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T_{\text{c}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{c}} = 1{,}13 \cdot 10^7\ \text{K}.$$