

**I. megoldás.** Két tömegpont egymásra  $\gamma \frac{m_1 m_2}{|r|^3} \mathbf{r}$  gravitációs erőt fejt ki. A feladatban szereplő kockáknak van kiterjedésük, és nincsenek olyan messze egymástól, hogy tömegpontként kezelve őket könnyen ki lehetne számolni a rájuk ható erőt. Ha az erő nagyságát nem is, de a két elrendezésben fellépő erők *arányát* egyszerű megfontolással meghatározhatjuk.

Bontsuk fel a két kis kockát nagyon sok kicsiny, pontszerűnek tekinthető részre. Daraboljuk fel a két nagy kockát is ugyanennyi részre, mint a kicsiket oly módon, hogy az egyik felbontás a másik arányos (lineáris méreteiben háromszoros) nagyítása legyen. A kockák között ható gravitációs erő mindkét esetben a felbontás kis részei között ható erők vektori összege.

Hasonlítsuk össze páronként a kis részek között ható erőket az  $a$  és a  $3a$  oldalélű kockákra. A nagyobb kocka felbontásánál keletkező kicsi részek tömege  $3^3 = 27$ -szer nagyobb, mint a kis kockák megfelelő részeié. A részek közötti távolság viszont mindegyik párnál 3-szor nagyobb a  $3a$  oldalélű kockáknál, mint a kisebb párjuknál, így végül az erők aránya  $27^2/3^2 = 81$ . Mivel ez az arány mindegyik erőpárra igaz, és a kis darabok között ható erők iránya megegyezik a két elrendezésnél, az eredő erőre is fennáll: a  $3a$  oldalélű kockák 81-szer nagyobb gravitációs vonzóerőt fejtenek ki egymásra, mint a kisebb,  $a$  oldalélű kockák.

**II. megoldás.** A feladatot a dimenzióanalízis módszerével is megoldhatjuk. A keresett  $F$  erő nyilván függ a  $\gamma$  gravitációs állandótól, a testek  $\rho$  sűrűségétől, valamint a  $d$ -vel jelölt méretüktől. (Esetünkben  $d = a$ , illetve  $d = 3a$ .) A paraméterektől való függést kereshetjük hatványok szorzatának alakjában:

$$F \sim \gamma^x \cdot \rho^y \cdot d^z,$$

ahol  $x$ ,  $y$  és  $z$  ismeretlen kitevők. A fenti függvénykapcsolatnak dimenziók szempontjából is helyesnek kell lennie:

$$\text{N} = \left( \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2} \right)^x \cdot \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^y (\text{m})^z.$$

A newton, a méter és a kilogramm független mértékegységek (jóllehet a newton nem SI-alapmértékegység), emiatt a hatványkitevőjük külön-külön „rendben kell legyen”, vagyis teljesülnie kell a következő egyenleteknek:

$$1 = x, \quad 0 = 2x - 3y + z, \quad 0 = -2x + y.$$

Ezek megoldása:  $x = 1$ ;  $y = 2$  és  $z = 4$ , vagyis a keresett függvénykapcsolat:

$$F \sim \gamma \rho^2 d^4.$$

Látható, hogy ha a  $d$  méretet az eredeti érték 3-szorosára növeljük, a vonzóerő  $3^4 = 81$ -szer lesz nagyobb.