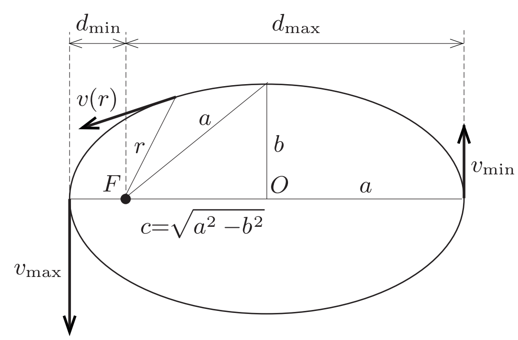
Megoldás. *a*) és *b*) A mesterséges hold legnagyobb, illetve legkisebb távolsága a Föld tömegközéppontjától, vagyis az ellipszispálya F fókuszpontjától:

$$d_{\min} = a - \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad d_{\max} = a + \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Az m tömegű műhold összenergiája (a mozgási és a gravitációs energia összege) a mozgás során állandó:

$$E_{\text{összes}} = \frac{1}{2} m v_{\min}^2 - \gamma \frac{Mm}{d_{\max}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 - \gamma \frac{Mm}{d_{\min}}. \tag{1}$$

(M a Föld tömegét jelöli.)



A mozgás során a mesterséges hold perdülete is állandó, így a Földhöz legközelebbi (perigeum) és a legtávolabbi (apogeum) pontban is ugyanakkora:

$$m d_{\max} v_{\min} = m d_{\min} v_{\max}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletből a két sebesség meghatározható:

$$v_{\max} = \sqrt{2\gamma M \frac{d_{\max}}{(d_{\min} + d_{\max}) d_{\min}}} = \sqrt{2\gamma M \frac{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab^2}},$$

$$v_{\min} = \sqrt{2\gamma M \frac{d_{\min}}{(d_{\min} + d_{\max}) d_{\max}}} = \sqrt{2\gamma M \frac{2a^2 - b^2 - 2a\sqrt{a^2 - b^2}}{2ab^2}},$$

amelyek a szokásos $c = \overline{OF} = \sqrt{a^2 - b^2}$ jelölés alkalmazásával így is felírhatóak:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\gamma M}{a} \frac{a + c}{a - c}}, \qquad v_{\min} = \sqrt{\frac{\gamma M}{a} \frac{a - c}{a + c}}. \tag{3}$$

c) A műhold teljes energiája (3) és (1) felhasználásával kifejezhető az ismert adatokkal. Például a perigeumból számolva:

$$E_{\text{összes}} = \gamma \frac{Mm}{2a} \frac{a + c}{a - c} - \gamma \frac{Mm}{a - c} = -\gamma \frac{Mm}{2a}.$$

Ez az energia megegyezik a műhold tetszőleges, a Föld középpontjától r távolságú ($d_{\min} < r < d_{\max}$), v sebességű helyzetében számolható összenergiával:

$$E_{\text{összes}} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r} = -\gamma \frac{Mm}{2a}, \quad \text{ahonnan} \quad v(r) = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$