Megoldás. A következő adatokat és állandókat ismerjük:
– az Űrállomás keringési ideje: $T = 92$ perc $= 5520$ s;
– a Föld (közepes) sugara: $R = 6371$ km $= 6{,}371 \cdot 10^6$ m;
– a Föld tömege: $M = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg;
– a Newton-féle gravitációs állandó: $\gamma = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2.

Ha az m tömegű Űrállomás h magasságban, tehát a Föld középpontjától valamekkora $r = R + h$ távolságban kering, akkor a rá ható gravitációs erő

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2},$$

a (centripetális) gyorsulása pedig

$$a = r\omega^2 = r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

A mozgásegyenlet szerint

$$F = ma, \qquad \text{azaz} \qquad \gamma\frac{mM}{r^2} = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Innen a keringési pálya sugara, majd annak ismeretében a felszíntől mért távolsága is kiszámítható:

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} \approx 6751 \text{ km}, \qquad h = r - R \approx 380 \text{ km}.$$

A keringési idő és a pálya körpályájának sugara közötti összefüggés:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}}.$$

Ha ebben a képletben r helyébe a fentebb kiszámítottnál 100 méterrel kisebb értéket írunk, a keringési időre $T' = 5519{,}88$ s, vagyis az eredeti értéknél 0,12 másodperccel kevesebb adódik. Ennyivel *csökken* tehát naponta az Űrállomás keringési ideje, ha nem hajt végre pályakorrekciót.

Megjegyzés. A keringési idő megváltozását két – majdnem egyforma nagyságú – időtartam különbségeként számítottuk ki. Ez nem túl szerencsés eljárás, hiszen ezeket az időtartamokat csak bizonyos pontossággal ismerjük, és általában a különbség (abszolút) hibája is a kisebbítendő és a kivonandó hibájának nagyságrendjébe esik, relatív hibája pedig (ha maga a különbség kicsi) igen naggyá válhat.

A feladatban megadott 92 perces keringési idő nem azt jelenti, hogy $T = 92{,}000$ perc, hanem hogy T értéke valahol 91,5 és 92,5 perc közé esik, vagyis 2 jegyre pontos, a harmadik számjegye bizonytalan. (Általános szabály, hogy egy fizikai mennyiség megadott értékét annyira tekintjük pontosnak, amennyire a ténylegesen kiírt számjegyek utalnak.) Emiatt a kiszámított pályasugár is csak ennyire (néhány százaléknyira) pontos, tehát a számszerű értékét csak kb. 60 km-es hiba erejéig „vehetjük komolyan". Az első kérdésre adott válasz eszerint az, hogy $h \approx (380 \pm 60)$ km. Vegyük észre, hogy a százaléknyi pontossággal kiszámított r és az ezreléknyi pontossággal megadható R különbsége már több, mint 15%-ra bizonytalan.

Hasonló módon, de még élesebben jelentkezik ez a probléma az időtartamok különbségénél. A százaléknyira pontos (vagy inkább pontatlan) r-ből, illetve annak 100 méterrel lecsökkenő értékéből kiszámított keringési időről csak annyit mondhatunk, hogy $T' = (5520 \pm 50)$ s (a hibának csak a nagyságrendje lényeges, a számértéke nem). Ennek az időnek és az eredeti $T = 5520$ s-nak a különbsége (a számolási pontosság erejéig) *nulla!* Mindezek ellenére a keringési idő fentebb kiszámított 0,1 másodperces változása *helyes,* ennek okát, javasoljuk, derítse ki az Olvasó.

Ha egymáshoz közeli mennyiségek különbségét kell meghatároznunk, célszerű, ha a paraméterekkel (a fizikai mennyiségeket jelölő betűkkel) végezzük el a számolást, és a numerikus értékeket csak a végképletbe helyettesítjük be. Esetünkben például az

$$r^3 = K \cdot T^2 \qquad \left(K = \sqrt[3]{\gamma M/(4\pi^2)} = \text{állandó}\right)$$

és az

$$(r + \Delta r)^3 = K \cdot (T + \Delta T)^2$$

egyenletek különbségét képezve (és a kis változások négyzetét és köbét elhanyagolva) a következő eredményt kapjuk:

$$\Delta T = \frac{3}{2}\,\frac{\Delta r}{r}\,T = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{-0{,}1 \text{ km}}{6751 \text{ km}}\right) \cdot 5520 \text{ s} \approx -0{,}12 \text{ s}.$$

Látható, hogy a fenti eredmény kiszámításánál nem volt szükségünk T és T' nagyon pontos (nagyon sok tizedesjeggyel történő) megadására, illetve ilyen pontosságú kiszámítására.